

ΣΕΜΦΕ 2025
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

Άσκηση 1. Δείξτε ότι το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ δείξτε ότι η f είναι επί. Ομοίως δείξτε ότι το ίδιο συμβαίνει αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

(β) Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Άσκηση 3. Έστω (a, b) ένα ανοικτό μη κενό διάστημα του $\mathbb{R}$. Βρείτε μια συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 1-1 και επί και τέτοια ώστε η f και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμες.

Άσκηση 4. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f δεν είναι μονότονη συνάρτηση αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ με $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

Άσκηση 5. (α) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. (β) Ισχύει το αντίστροφο?

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f' είναι μη σταθερή συνάρτηση δείξτε ότι λαμβάνει και ρητές και άρρητες τιμές.

Άσκηση 7. Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f'(x) \in \mathbb{N}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι δεν υπάρχει $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F' = f$.

Άσκηση 9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $(x - \delta, x + \delta)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x^2 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$.

Άσκηση 11. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο) δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Άσκηση 12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν (πεπερασμένα ή άπειρα).
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.
3. Η f' είναι συνεχής στο x_0 .

Άρα η f' είναι ασυνεχής σε ένα σημείο x_0 αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ δεν υπάρχει. Ισοδύναμα, οι ασυνέχειες της f' είναι όλες γ' είδους.

Άσκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι (α) η f είναι παραγωγίσιμη (β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 14. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)}{x^2} = f''(x_0) \quad (1)$$

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'''(x) = 12$ δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $x^3 < f(x) < 3x^3$ για όλα τα $x > M$.

Άσκηση 16. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με την δεύτερη παράγωγο συνεχή στο 0. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) θετικών αριθμών με $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - x_n}{x_n^2} = 1$.

- (i) Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 1$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.
- (ii) Υπολογίστε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.
- (iii) Χρησιμοποιώντας τον Τύπο Taylor υπολογίστε την $f''(0)$.

Άσκηση 17. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η f και η f'' είναι φραγμένες δείξτε ότι και η f' είναι φραγμένη.

Άσκηση 18. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ και $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$.

Άσκηση 19. Έστω $f(x) = x + \sin x \cos x$ και $g(x) = f(x)e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$. (α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. (β) Βρείτε το λάθος στην παρακάτω "απόδειξη": Έχουμε $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x$ και

$$g'(x) = 2 \cos^2 x e^{\sin x} + (x + \sin x \cos x) e^{\sin x} \cos x = \cos x \cdot e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)$$

Άρα από τον κανόνα de l' Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos^2 x}{\cos x \cdot e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos x}{e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)} = 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 20. (Αντίστροφο Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $J = f'(\mathbb{R})$ το σύνολο τιμών της f' . Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ με το $f'(\xi)$ εσωτερικό σημείο του $J = f'(\mathbb{R})$ (θυμίζουμε ότι από το Θεώρημα Darboux το $J = f'(\mathbb{R})$ είναι διάστημα). Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$. Ισχύει το ίδιο αν το $f'(\xi)$ είναι άκρο του J ;