

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $xf(x) \geq 0$. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

Ασκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας f που να είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

Ασκηση 3. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ασκηση 4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

[Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την αρχή της πληρότητας.]

Ασκηση 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Ασκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Ασκηση 7. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη. Παίρνει η f απαραίτητα μέγιστη τιμή;