

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

- (α) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f(x) > \frac{4}{5}$.
- (β) Η $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής.
- (γ) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
- (δ) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
- (ε) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
- (στ) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο ξ , τότε είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ζ) Αν η f είναι συνεχής στο (a, b) και $f(q) = 0$ για κάθε ρητό $q \in (a, b)$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Υπόδειξη: (α) Σωστό. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon = \frac{1}{5} > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{5}, \text{ δηλαδή } |f(x) - 1| < \frac{1}{5}.$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5} < f(x) < 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

(β) Σωστό. Όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f είναι μεμονωμένα σημεία του, άρα η f είναι συνεχής σε αυτά. Το επιχείρημα είναι το εξής: έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \frac{1}{2}$. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $|n - m| < \frac{1}{2}$, τότε, αναγκαστικά, $n = m$. Συνεπώς,

$$|f(n) - f(m)| = |f(m) - f(m)| = 0 < \varepsilon.$$

(γ) Σωστό. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που παίρνει την τιμή 1 στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και την τιμή 0 σε όλα τα άλλα σημεία.

(δ) Σωστό. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(x) = x$ αν $x = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και $f(x) = 0$ σε όλα τα άλλα σημεία. Για να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο 0 χρησιμοποιήστε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας.

(ε) Σωστό. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$.

(στ) Λάθος. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \neq 4$ και $f(4) = 1$. Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 4$ και συνεχής σε κάθε άρρητο x .

(ζ) Σωστό. Θεωρήστε $x \in (a, b)$ και ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών από το (a, b) η οποία συγκλίνει στο x . Τέτοια ακολουθία υπάρχει λόγω της πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x , η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(q_n) \rightarrow f(x)$. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και συνεπώς, $f(x) = 0$. $\square$

Ασκηση 2. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Υπόδειξη: Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[0, 1]$. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση, τότε $m < M$ (γιατί;). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει άρρητος α ώστε $m < \alpha < M$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (0, 1)$ με $f(x) = \alpha$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι η f παίρνει μόνο ρητές τιμές. $\square$

Άσκηση 3. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a, b]$. Τότε, $|f(t)| > 0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Η συνεχής συνάρτηση $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε

$$|f(t)| \geq |f(x)| > 0 \quad \text{για κάθε } t \in [a, b].$$

Όμως, από την υπόθεση, υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$0 < |f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(y)|.$$

Δηλαδή, $|f(y)| < 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Άσκηση 4. (α) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$.

(β) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ συνεχείς συναρτήσεις με $\max(f) = \max(g)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Υπόδειξη: (α) Υπάρχει $x_1 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $\max(f) = f(x_1)$, Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(x_1) < g(x_1)$. Όμως, $g(x_1) \leq \max(g)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\max(f) = f(x_1) < g(x_1) \leq \max(g),$$

δηλαδή $\max(f) < \max(g)$.

(β) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε $f(x_1) = \max(f) = \max(g) = g(x_2)$. Τότε, για τη συνάρτηση $h = f - g$ έχουμε

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = \max(f) - g(x_1) = \max(g) - g(x_1) \geq 0$$

και

$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - \max(g) = f(x_2) - \max(f) \leq 0.$$

Από την $h(x_1)h(x_2) \leq 0$ και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $h(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = g(\xi)$. □

Άσκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0) = x_0.$$

Υπόδειξη: Αφού η f είναι φθίνουσα, για κάθε $x > 0$ έχουμε $f(x) - x \leq f(0) - x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(0) - x) = -\infty$.

Επομένως, υπάρχει $x_1 > 0$ ώστε $f(x_1) - x_1 < 0$.

Όμοια, για κάθε $x < 0$ έχουμε $f(x) - x \geq f(0) - x$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(0) - x) = +\infty$. Επομένως, υπάρχει $x_2 < 0$ ώστε $f(x_2) - x_2 > 0$.

Αφού η f είναι συνεχής, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την $f(x) - x$ στο διάστημα $[x_2, x_1]$ βρίσκουμε $x_0 \in (x_2, x_1)$ ώστε $f(x_0) - x_0 = 0$, δηλαδή $f(x_0) = x_0$.

Για τη μοναδικότητα, παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα, και συνεπώς, έχει το πολύ μία ρίζα. □

Άσκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(y) \geq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $\varepsilon = f(0) > 0$. Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x > M$ ισχύει $0 < f(x) < f(0)$. Αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε: για κάθε $x < -N$ ισχύει $0 < f(x) < f(0)$.

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-N, M]$. Επομένως, υπάρχει $y \in [-N, M]$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in [-N, M]$ ισχύει $f(x) \leq f(y)$. Ειδικότερα, αφού $-N < 0 < M$ έχουμε $f(0) \leq f(y)$.

Μπορούμε τώρα εύκολα να δούμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο y . Θεωρήστε τυχόν $x \in \mathbb{R}$ και διακρίνετε τις περιπτώσεις $x < -N$, $x \in [-N, M]$ και $x > M$. $\square$

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι επί.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση, αν $f(x) = f(y)$ έχουμε $0 = |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, άρα $x = y$. Δηλαδή, η f είναι 1-1. Έπεται ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε, αν $x > 0$ έχουμε $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geq x$, δηλαδή

$$f(x) \geq f(0) + x, \quad x > 0.$$

Όμοια, αν $x < 0$ έχουμε $f(0) - f(x) = |f(x) - f(0)| \geq |x| = -x$, δηλαδή

$$f(x) \leq f(0) + x, \quad x < 0.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι η f είναι επί (εξηγήστε γιατί). $\square$