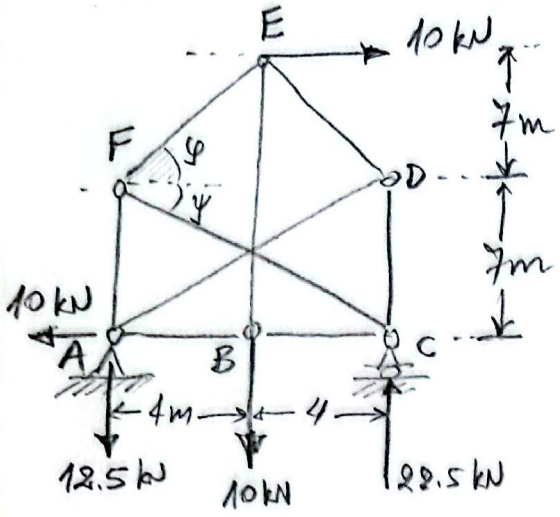
ΑΣΚΗΣΗ 10-13 (Μέθοδος εναλλαγής ράβδων Henneberg)

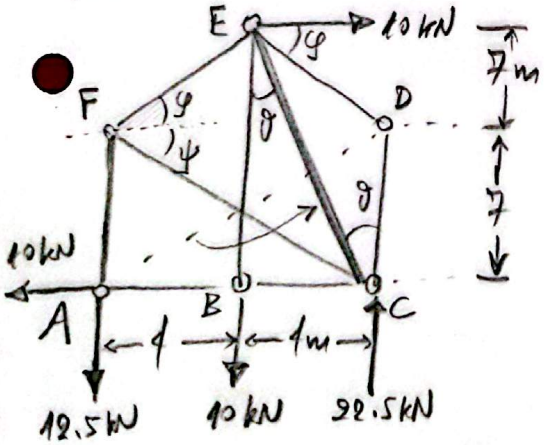


Δίνονται οι αντιδράσεις στηρίξεως του σύνθετου δικτυώματος και ζητείται ο υπολογισμός των δυνάμεων των ράβδων με τη μέθοδο Henneberg.

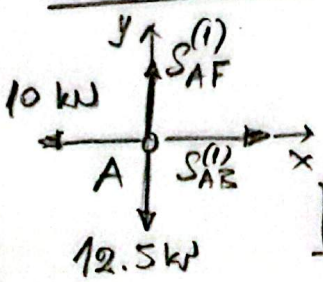
Λύση

- Παρατηρείται ότι σε κάθε κόμβο συντρέχουν 3 ράβδοι οπότε δύσκολη η εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων. Αυτό το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε στην ΑΣΚΗΣΗ 10-12 με τη χρήση της μεθόδου των τομών Ritter. Εδώ, με τη χρήση της μεθόδου Henneberg το πρόβλημα θα λυθεί με τη μέθοδο των κόμβων, χωρίς καθόλου τη χρήση της μεθόδου των τομών Ritter.

- Αντί του πραγματικού προβλήματος, επιλύση του Προβλήματος (1), στο οποίο η ράβδος AD αντικατάσταθηκε από την ράβδο CE. Ο ελεύθερος φορέας στο Πρόβλημα (1) είναι στερεός και ισοστατικός, όπως στο πραγματικό πρόβλημα. Τώρα έχουν προκύψει 2 κόμβοι, οι A και D, από όπου αφαιρέθηκε η ράβδος αντικατάστασης AD, στους οποίους συντρέχουν μόνο 2 ράβδοι, άρα σε αυτούς μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των κόμβων:



Κόμβος A



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$\boxed{S_{AB}^{(1)} = 10\ kN}$ E

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$\boxed{S_{AF}^{(1)} = 12.5\ kN}$ E

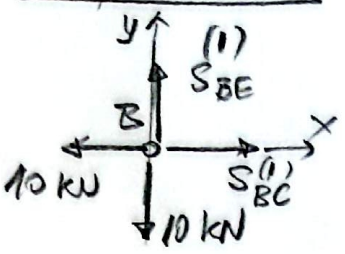
Κόμβος D

Από το 1ο θεώρημα άτονων ράβδων (στον εξωτερικά αφόρτιστο κόμβο D συντρέχουν 2 ράβδοι) προκύπτει ότι:

$$\boxed{S_{DE}^{(1)} = S_{DC}^{(1)} = 0\ kN}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Κόμβος B



$\Sigma f_x = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{S^{(1)}_{BC} = 10\ kN}\ E$$

$\Sigma f_y = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{S^{(1)}_{BE} = 10\ kN}\ E$$

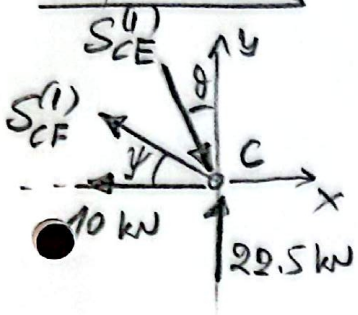
Γεωμετρία

$\varphi = 60.26°,\ \sigma\upsilon\nu\varphi = 0.496,\ \eta\mu\varphi = 0.868$

$\psi = 41.19°,\ \sigma\upsilon\nu\psi = 0.753,\ \eta\mu\psi = 0.659$

$\vartheta = 15.95°,\ \sigma\upsilon\nu\vartheta = 0.962,\ \eta\mu\vartheta = 0.274$

Κόμβος C



$\Sigma f_x = 0 \Rightarrow$

$0.274\, S^{(1)}_{CE} - 0.753\, S^{(1)}_{CF} = 10$

$\Sigma f_y = 0 \Rightarrow$

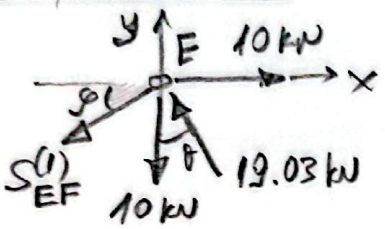
$0.962\, S^{(1)}_{CE} - 0.659\, S^{(1)}_{CF} = 22.5$

$\Rightarrow$

$$\boxed{S^{(1)}_{CE} = 12.03\ kN}\ \Theta$$

$$\boxed{S^{(1)}_{CF} = -6.35\ kN}\ \Theta$$

Κόμβος E



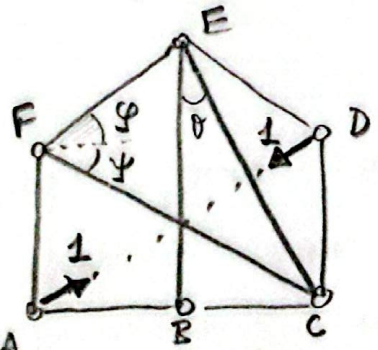
$\Sigma f_x = 0 \Rightarrow$

$10 - 0.274 \times 12.03 = 0.496\, S^{(1)}_{EF} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{S^{(1)}_{EF} = 9.65\ kN}\ E$$

Έλεγχος κατά y: $0.868 \times 9.65 - 0.962 \times 19.03 = -10$ ✓

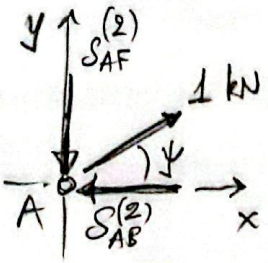
- **Πρόβλημα (2)**: Μοναδιαία, αριστερόστροφη ροπή στους κόμβους A, D, αφαιρώντας τη ράβδο AD αντικαθιστώντας, και τη δοκό AD. Το πρόβλημα από δύο φορές υπερστατικό και (αγνοώντας το ίδιο τόξο των πλαστικών μηχανισμών) ως προς τους πλαστικούς μηχανισμούς στους A και C:



(Ελλιπώς φορτίσιμος)

Στον κόμβο B συντρέχουν 3 ράβδοι 2 εκ των οποίων συγγραμμικές, άρα $\boxed{S^{(2)}_{BE} = 0\ kN}$

Κόμβος A



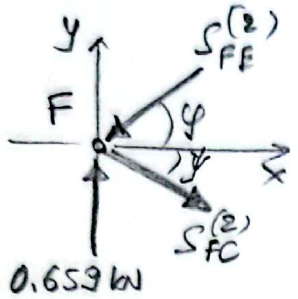
$\Sigma f_x = 0 \Rightarrow$ $\boxed{S^{(2)}_{AB} = 0.753\ kN}\ \Theta$

$\Sigma f_y = 0 \Rightarrow$ $\boxed{S^{(2)}_{AF} = 0.659\ kN}\ \Theta$

$$\boxed{S^{(2)}_{BC} = S^{(2)}_{AB} = 0.753\ kN}\ \Theta$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Κόμβος F



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

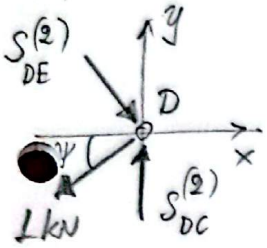
$0.753\, S_{FC}^{(2)} - 0.496\, S_{FE}^{(2)} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$0.659\, S_{FC}^{(2)} + 0.868\, S_{FE}^{(2)} = 0.659$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{S_{FE}^{(2)} = 0.506\ kN} \ \underline{\Theta} \\ \boxed{S_{FC}^{(2)} = 0.333\ kN} \ \underline{E} \end{cases}$

Κόμβος D



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

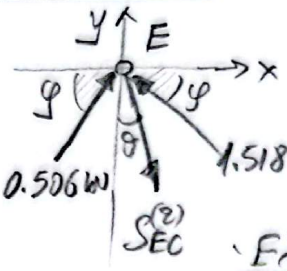
$\boxed{S_{DE}^{(2)} = 1.518\ kN}\ \underline{\Theta}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$S_{DC}^{(2)} = 0.659 \times 1 + 0.868 \times 1.518$

$\Rightarrow \boxed{S_{DC}^{(2)} = 1.977\ kN}\ \underline{\Theta}$

Κόμβος E



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$S_{EC}^{(2)} = \dfrac{(0.506 + 1.518)\sin\varphi}{\cos\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S_{EC}^{(2)} = 1.826\ kN}\ \underline{E}$

Έλεγχος κατά x:

$(1.518 - 0.506)\cos\varphi = 1.826 \sin\theta$ ✓

- Επαλληλία (υπέρθεση) αποτελεσμ. Προβλημάτων (1) + (2)

$$\boxed{S_i = S_i^{(1)} + X\, S_i^{(2)}}$$

όπου ο άγνωστος X υπολογίζεται από τη συνθήκη μηδενισμού της δύναμης S_{CE}, διότι η ράβδος CE δεν υπάρχει στον πραγματικό (αρχικό) φορέα:

$$S_{CE} \equiv 0 = S_{CE}^{(1)} + X\, S_{CE}^{(2)} \Rightarrow X = -\frac{S_{CE}^{(1)}}{S_{CE}^{(2)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = -\frac{-19.03}{+1.826} = +10.42}$$

Με γνωστή την τιμή του X, οι δυνάμεις των ράβδων στο πραγματικό πρόβλημα υπολογίζονται στον ακόλουθο πίνακα

Σαρώθηκε με το CamScanner

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΡΑΒΔΩΝ

	Πρόβλημα (1)		Πρόβλημα (2)		X		Πραγματικό Πρόβλημα	
S_{AB}	+10 kN	⊕	(−0.753 kN	⊗	10.42)	⊖	+2.15 kN	E
S_{AF}	+12.5	⊕	(−0.659	⊗	10.42)	⊖	+5.63	E
S_{DE}	0	⊕	(−1.518	⊗	10.42)	⊖	−15.82	⊖
S_{DC}	0	⊕	(−1.977	⊗	10.42)	⊖	−20.60	⊖
S_{BC}	+10	⊕	(−0.753	⊗	10.42)	⊖	+2.15	E
S_{BE}	+10	⊕	(0	⊗	10.42)	⊖	+10.00	E
S_{CE}	−19.03	⊕	(+1.826	⊗	10.42)	⊖	0	−
S_{CF}	−6.35	⊕	(+0.333	⊗	10.42)	⊖	−2.88	⊖
S_{EF}	+9.65	⊕	(−0.506	⊗	10.42)	⊖	+4.38	E
S_{AD}	0	⊕	(1	⊗	10.42)	⊖	+10.42	E

Σαρώθηκε με το CamScanner