

ΣΕΜΦΕ 2025
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a) = a^2$ για κάθε a άρρητο. Δείξτε ότι $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (a_n) αρρήτων με $\lim a_n = x$. Η g είναι συνεχής και άρα από Αρχή Μεταφοράς, έχουμε $\lim g(a_n) = g(x)$. Όμως $g(a_n) = f(a_n) - a_n^2 = 0$ και άρα $g(x) = \lim g(a_n) = 0$. Συνεπώς $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, αύξουσα με την ιδιότητα $f(0) = 0$ και $|f(x)| \geq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

Λύση. Επειδή $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα με $f(0) = 0$ έχουμε ότι

$$x < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \text{και} \quad x > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

Συνεπώς επειδή $|f(x)| \geq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$x < 0 \Rightarrow f(x) \leq x \quad \text{και} \quad x > 0 \Rightarrow f(x) \geq x$$

Έστω $y \in \mathbb{R}$. Αν $x_1 = -|y| - 1 < 0$ και $x_2 = |y| + 1 > 0$ τότε

$$f(x_1) \leq x_1 < y < x_2 \leq f(x_2)$$

και από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών έχουμε το συμπέρασμα.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $|f(x)| > 1/\delta$ δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτοντας $\delta = 1/n$ επιλέγουμε $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ με $|f(x_n)| > 1/\delta = n$. Από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, (αφού $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$) έπεται ότι $x_n \rightarrow x_0$. Επειδή $|f(x_n)| > n$ έπεται ότι $|f(x_n)| \rightarrow +\infty$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0 γιατί αν ήταν, από Αρχή Μεταφοράς, θα έπρεπε $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ δηλαδή η $(f(x_n))$ θα ήταν φραγμένη ως συγκλίνουσα.

Άσκηση 4. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και τέτοιες ώστε $\min\{f(x) : x \in [a, b]\} = \min\{g(x) : x \in [a, b]\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Λύση. Θέτουμε $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} = \min\{g(x) : x \in [a, b]\}$. Αφού $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς μπορούμε να επιλέξουμε σημεία στο $[a, b]$ όπου η f και η g λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή. Αν μπορούμε να επιλέξουμε κοινό σημείο x_0 , όπου οι f και g λαμβάνουν την κοινή ελάχιστη τιμή τους τότε $f(x_0) = g(x_0) = m$. Αν όχι έστω $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ και $g(x_2) = \inf\{g(x) : x \in [a, b]\}$. Θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ και παρατηρούμε ότι $h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = m - g(x_1) < 0$ ενώ $h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - m > 0$. Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2 με $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$.

Άσκηση 5. Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) Η συνάρτηση $f : (0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ 2 & x \in (1, 2] \end{cases}$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιος} \\ 1 & n \text{ περιττός} \end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. (α) Η πρόταση είναι σωστή. Η f είναι συνεχής αφού είναι συνεχής σε καθένα από τα δύο ξένα διαστήματα που διαμερίζουν το πεδίο ορισμού της. Επίσης δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού για $\epsilon = 1/2$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $0 < x < 1 < y < 2$ με $|y - x| < \delta$ και $|f(y) - f(x)| = 2 - 1 = 1 > \epsilon$.

(β) Η πρόταση είναι σωστή. Το A αποτελείται από απομονωμένα σημεία και συνεπώς κάθε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A είναι συνεχής συνάρτηση. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού αν $x_n = \frac{1}{2n}$ και $x'_n = \frac{1}{2n+1}$ έχουμε $x_n - x'_n \rightarrow 0$ αλλά $|f(x_n) - f(x'_n)| = 1$.

Άσκηση 6. (α) Έστω $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. (i) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. (ii) Ισχύει το ίδιο για το γινόμενο ή το πηλίκο.

(β) Έστω $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(X) \subseteq Y$. Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς δείξτε ότι και η συνθεσή τους $F(x) = f(g(x))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. (α) (i) Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και έστω $F = \lambda f + \mu g$. Έστω $(x_n), (x'_n)$ ακολουθίες με $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$. Θα δείξουμε ότι $|F(x_n) - F(x'_n)| \rightarrow 0$. Πράγματι,

$$|F(x_n) - F(x'_n)| = |\lambda f(x_n) + \mu g(x_n) - \lambda f(x'_n) - \mu g(x'_n)| \leq |\lambda| |f(x_n) - f(x'_n)| + |\mu| |g(x_n) - g(x'_n)| \quad (1)$$

Αλλά οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς και συνεπώς

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad |g(x_n) - g(x'_n)| \rightarrow 0 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $|F(x_n) - F(x'_n)| \rightarrow 0$.

(ii) Δεν ισχύει το ίδιο για το γινόμενο ή το πηλίκο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $h(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά $h = fg$ με $f(x) = g(x) = x$ που είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Ομοίως, η συνάρτηση $\frac{1}{x}$, $x > 0$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά είναι το πηλίκο δύο ομοιόμορφα συνεχών.

(β) Έστω $(x_n), (x'_n)$ ακολουθίες με $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$. Θα δείξουμε ότι $|F(x_n) - F(x'_n)| \rightarrow 0$. Πράγματι, από την ομοιόμορφη συνέχεια των g και f έχουμε

$$|x_n - x'_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |g(x_n) - g(x'_n)| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(g(x_n)) - f(g(x'_n))| \rightarrow 0 \Rightarrow |F(x_n) - F(x'_n)| \rightarrow 0$$

Άσκηση 7. Είναι σωστό ότι αν μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε είναι **ομοιομορφισμός** (δηλαδή και η ίδια και η αντίστροφή της είναι συνεχείς συναρτήσεις) ?

Λύση. Ναι είναι σωστό: Έστω $f : I \rightarrow J$ γνησίως μονότονη όπου I, J διαστήματα και $J = f(I)$. Γνωρίζουμε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση με πεδίο τιμών διάστημα (ασχέτως αν το πεδίο ορισμού είναι διάστημα ή όχι) είναι συνεχής. Άρα επειδή το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα J η f είναι συνεχής. Ομοίως η $f^{-1} : J \rightarrow I$ είναι γνησίως μονότονη και έχει πεδίο τιμών το διάστημα I . Άρα είναι και αυτή συνεχής.

Άσκηση 8. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ καλείται **Lipschitz** αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|$$

για όλα τα $x, x' \in X$.

(α) Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά δεν είναι Lipschitz.

(γ) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι Lipschitz αν και μόνο αν έχει φραγμένη παράγωγο.

(δ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. (α) Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz συνάρτηση και έστω σταθερά $C > 0$ με $|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|$, για όλα τα $x, x' \in X$. Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \epsilon/C$. Τότε για κάθε $x, x' \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < C|x - x'| < C\frac{\epsilon}{C} = \epsilon$$

(β) Επειδή η f ορίζεται σε κλειστό φραγμένο διάστημα και είναι και συνεχής από γνωστό θεώρημα έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν τώρα η f ήταν Lipschitz θα έπρεπε να υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq C|x - x'|$, για κάθε $x, x' \geq 0$. Ειδικότερα, αν $x' = 0$ τότε για κάθε $x > 0$ θα ισχύει ότι,

$$\sqrt{x} \leq Cx \Rightarrow x \leq C^2x^2 \Rightarrow \frac{1}{C^2} \leq x$$

που φυσικά είναι αδύνατον (πχ. για $x = \frac{1}{2C^2}$).

(γ) Έστω ότι η f είναι Lipschitz με σταθερά $C > 0$ και έστω $x_0 \in I$. Τότε για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$ έχουμε

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq C$$

και συνεπώς

$$|f'(x_0)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq C$$

Άρα $|f'(x)| \leq C$ για κάθε $x \in I$.

Αντίστροφα έστω ότι η f έχει φραγμένη παράγωγο. Τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, για κάθε $x, x' \in I$ με $x \neq x'$, υπάρχει ξ μεταξύ των x και x' τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} &= f'(\xi) \Rightarrow \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \right| = |f'(\xi)| \leq C \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq C|x - x'| \end{aligned}$$

(δ) Αφού $|(\sin x)'| = |\cos x| \leq 1$ από το (γ) έχουμε ότι η $f(x) = \sin x$ είναι Lipschitz. Τώρα από το (α) έπεται ότι είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $a \in [-1, 1]$ υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n \neq 0$, $x_n \rightarrow 0$ και $f(x_n) \rightarrow a$.

(γ) Δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. (α) Έστω $a \in [-1, 1]$. Επειδή η $\sin x : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ είναι επί υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi]$ με $\sin \theta = a$. Θέτουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n + \theta}$. Τότε $f(x_n) = \sin(2\pi n + \theta) = a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $f(x_n) \rightarrow a$.

(β) Έστω $x_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$ και $x'_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$ αλλά $|f(x_n) - f(x'_n)| = 2$ και άρα $|f(x_n) - f(x'_n)| \not\rightarrow 0$.

Άσκηση 10. Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f μεταφέρει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $Y \subseteq X$ φραγμένο και έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το $f(Y)$ δεν είναι φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι

$$(\forall M \in \mathbb{R}) (\exists x \in Y) \text{ τέτοιο ώστε } |f(x)| > M \quad (3)$$

Με βάση την (3) ορίζουμε αναδρομικά μια ακολουθία (x_n) στο Y με την ιδιότητα

$$|f(x_{n+1})| > |f(x_n)| + 1 \quad (4)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι από την (3) για $M = 1$ υπάρχει $x_1 \in Y$ με $|f(x_1)| > 1$. Ομοίως για $M = |f(x_1)| + 1$ υπάρχει $x_2 \in Y$ με $|f(x_2)| > M = |f(x_1)| + 1$. Ομοίως για $M = |f(x_2)| + 1$ υπάρχει $x_3 \in Y$ με $|f(x_3)| > M = |f(x_2)| + 1$ κ.ο.κ.

Η (x_n) είναι ακολουθία στο Y και άρα είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass η (x_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) . Έστω (y_n) και (z_n) να είναι οι υπακολουθίες των αρτίων και αντίστοιχα των περιττών όρων της (x_{k_n}) , δηλαδή

$$y_n = x_{k_{2n}} \quad \text{και} \quad z_n = x_{k_{2n-1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι (y_n) και (z_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο με την (x_{k_n}) (αφού είναι υπακολουθίες της) και άρα $|y_n - z_n| \rightarrow 0$. Συνεπώς, αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής θα πρέπει $|f(y_n) - f(z_n)| \rightarrow 0$. Όμως,

$$|f(y_n) - f(z_n)| = |f(x_{k_{2n}}) - f(x_{k_{2n-1}})| \stackrel{(4)}{>} 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο.

Άσκηση 11. Ορίζουμε $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } x \text{ ρητός και ο } x \text{ σε ανάγωγη μορφή γράφεται } x = \frac{m}{n} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ασυνεχής στους ρητούς και συνεχής στους άρρητους.

Λύση. Έστω $x_0 \in (0, 1)$ ρητός. Τότε $f(x_0) = \frac{1}{n_0} \neq 0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας την Αρχή Μεταφοράς, για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να βρούμε μια ακολουθία (x_n) στο $[0, 1]$ με $x_n \rightarrow x_0$ τέτοια ώστε $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$. Πράγματι, επιλέγοντας μια ακολουθία αρρήτων (x_n) με $x_n \rightarrow x_0$ (υπάρχει τέτοια ακολουθία λόγω της πυκνότητας των αρρήτων στο $\mathbb{R}$) βλέπουμε ότι $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ αφού $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $f(x_n) \rightarrow 0$.

Έστω τώρα $x_0 \in (0, 1)$ άρρητος και άρα $f(x_0) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας. Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in (0, 1)$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = f(x) < \epsilon$. Για να προσδιορίσουμε το ζητούμενο $\delta > 0$ θέτουμε

$$F = \{x \in [0, 1] : f(x) \geq \epsilon\}$$

Το σύνολο F είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Πράγματι, έστω $x \in F$. Τότε $f(x) \neq 0$ και άρα x ρητός. Αν $x = \frac{m}{n}$ σε ανάγωγη μορφή τότε (1) $m < n$ (αφού $0 < \frac{m}{n} < 1$) και (2) $\frac{1}{n} \geq \epsilon \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{\epsilon}$.

Θέτουμε

$$\delta = \min\{|x - x_0| : x \in F\}$$

Τότε $\delta > 0$ (αφού $F \subseteq \mathbb{Q}$ και $x_0 \notin \mathbb{Q}$) και για κάθε $x \in (0, 1)$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε ότι $x \notin F$ και άρα $f(x) < \epsilon$.

Άσκηση 12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. (α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}$$

(β) Συμπεραίνετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν

$$\sup\{f(x) : x < x_0\} = \inf\{f(x) : x > x_0\} = f(x_0)$$

Λύση. (α) Το σύνολο $A = \{f(x) : x < x_0\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο (από το $f(x_0)$) και άρα έχει supremum. Έστω $M = \sup\{f(x) : x < x_0\}$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}$. Πρώτα έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $M - \epsilon < M$ το $M - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A και άρα για κάποιο $x_1 < x_0$ θα έχουμε $M - \epsilon < f(x_1)$. Τότε επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x_1 < x < x_0$ έπεται $f(x_1) \leq f(x) \leq M$. Αυτό σημαίνει ότι θέτοντας $\delta = x_0 - x_1$ έχουμε ότι αν $x_0 - \delta < x < x_0$ τότε $|f(x) - M| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}$. Το ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}$ αποδεικνύεται ανάλογα.

(β) Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

και άρα από το (α), αν και μόνο αν

$$\sup\{f(x) : x < x_0\} = \inf\{f(x) : x > x_0\} = f(x_0)$$