

ΣΑΤΜ 2025
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(i) $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx.$

(ii) $\int \frac{x}{x^2+6x+25} dx.$

Λύση. (i) Διασπάμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + A+C}{(x+1)(x^2+1)}$$

και άρα

$$A+B=0, B+C=0, A+C=1$$

Συνεπώς $A=C=1/2, B=-1/2$. Άρα

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x \end{aligned}$$

(ii) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+6x+25} dx = \int \frac{x}{x^2+6x+9+16} dx = \frac{1}{16} \int \frac{x}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2+1} dx.$$

Θέτουμε $y = \frac{x+3}{4} \Rightarrow x = 4y - 3, dx = 4dy$ οπότε

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+6x+25} dx &= \frac{4}{16} \int \frac{4y-3}{y^2+1} dy = \int \frac{y}{y^2+1} dy - \frac{3}{4} \int \frac{1}{y^2+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \ln(y^2+1) - \frac{3}{4} \arctan y \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x+3)^2}{16} + 1 \right) - \frac{3}{4} \arctan \left(\frac{x+3}{4} \right) \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(i) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx.$

$$(ii) \int \frac{e^x}{e^{3x} + e^{2x}} dx.$$

Λύση. (i) Έχουμε

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = \int \frac{x-1}{x^2-4x+4+1} dx = \int \frac{x-1}{(x-2)^2+1} dx.$$

Θέτουμε $y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2, dx = dy$ οπότε

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x-2)^2+1} dx &= \int \frac{y+1}{y^2+1} dy = \int \frac{y}{y^2+1} dy + \int \frac{1}{y^2+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \ln(y^2+1) - \arctan y \\ &= \frac{1}{2} \ln((x-2)^2+1) - \arctan(x-2) \end{aligned}$$

(ii) Θέτουμε $y = e^x$. Έχουμε $dy = e^x dx$ και

$$\int \frac{e^x}{e^{3x} + e^{2x}} dx = \int \frac{1}{y^3 + y^2} dy = \int \frac{1}{y^2(y+1)} dy$$

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y+1}$$

$$Ay(y+1) + B(y+1) + Cy^2 = 1$$

$$(A+C)y^2 + (A+B)y + B = 1$$

$$B = 1, A = -1, C = 1$$

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y+1}$$

$$\int \frac{1}{y^2(y+1)} dy = -\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{y^2} dy + \int \frac{1}{y+1} dy = -\ln|y| - \frac{1}{y} + \ln|y+1|$$

$$\int \frac{e^x}{e^{3x} + e^{2x}} dx = -\ln(e^x) - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x + 1) = -x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x + 1)$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ όπου $x(t) = \frac{1}{3}t^3$ και $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

Λύση. Έχουμε

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{t^4 + t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{t^2(t^2 + 1)} dt = \int_0^1 t\sqrt{t^2 + 1} dt$$

Θέτουμε $u = t^2 + 1, du = 2t dt$ και έχουμε

$$L = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{3} (2^{3/2} - 1) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$$

Άσκηση 4. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = 1 - \sin^3 t, y(t) = \cos^3 t, t \in [0, \pi/2]$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3 \cos^2 t (-\sin t))^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} 3 |\cos t \cdot \sin t| dt = 3 \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t dt
 \end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)' \cdot \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)' dt = \frac{1}{2} (\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L = 3/2$.

Άσκηση 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_c^d f^{-1}(x) dx = bd - ac - \int_a^b f(x) dx$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = f(t)$, $t \in [a, b]$ και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_c^d f^{-1}(x) dx &= \int_a^b f^{-1}(f(t)) f'(t) dt = \int_a^b t f'(t) dt \\
 &= [t f(t)]_a^b - \int_a^b t' f(t) dt \\
 &= bd - ac - \int_a^b f(t) dt
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Για κάθε $n = 0, 1, \dots$ θέτουμε

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx$$

(i) Βρείτε τα I_0 και I_1 . (ii) Δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Λύση. (1) (i) $I_0 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ και $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$.

(ii) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^{n-1} x (\sin x)' \, dx \\
 &= [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\cos^{n-1} x)' \sin x \, dx \\
 &= -(n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (\cos x)' \sin x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx \\
 &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
 \end{aligned}$$

και άρα

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 7. (α) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)g''(x) \, dx = f(b)g'(b) - f'(b)g(b) - f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + \int_a^b f''(x)g(x) \, dx$$

(β) Αν $f(x) = \arctan x$ και $g(x) = \cos x$ υπολογίστε με βάση το (α) το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \cos x \, dx.$$

Λύση. (α) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα Ολοκλήρωσης κατά παράγοντες δύο φορές ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)g''(x) \, dx &= f(x)g'(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g'(x) \, dx \\
 &= f(x)g'(x)|_a^b - \left(f'(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f''(x)g(x) \, dx \right) \\
 &= (f(x)g'(x) - f'(x)g(x))|_a^b + \int_a^b f''(x)g(x) \, dx \\
 &= f(b)g'(b) - f'(b)g(b) - f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + \int_a^b f''(x)g(x) \, dx
 \end{aligned}$$

(β) Θέτουμε $f(x) = \arctan x$ και $g(x) = \cos x$. Τότε $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = -\sin x$ και $g''(x) = -\cos x$.

Άρα από το (i),

$$\begin{aligned}
 - \int_0^\pi f(x) \cos x \, dx &= -f(\pi) \sin \pi - f'(\pi) \cos \pi + f(0) \sin 0 + f'(0) \cos 0 + \int_a^b f''(x) \cos x \, dx \\
 &= \frac{1}{1+\pi^2} + \frac{1}{1+0^2} + \int_a^b f''(x) \cos x \, dx = \frac{1}{1+\pi^2} + 1 + \int_a^b f''(x) \cos x \, dx
 \end{aligned}$$

και άρα

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \cos x \, dx = \int_0^\pi f(x) \cos x \, dx + \int_0^\pi f''(x) \cos x \, dx = -\frac{1}{1+\pi^2} - 1$$

Άσκηση 8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b-a)$$

Συμπεράνετε ότι αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε $\int_a^b f(x) \, dx \neq 0$.

Λύση. Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) \tag{1}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b - a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b - a)$$