ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cos^2 t \; dt$.

Λύση. Έχουμε,

$$\begin{aligned} I = \int \cos^2 t \; dt = \int \cos t \cdot (\sin t)' \; dt &= \cos t \cdot \sin t - \int (\cos t)' \sin t \; dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin t \sin t \; dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int \sin^2 t \; dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int \left(1 - \cos^2 t\right) \; dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + \int \; dt - \int \cos^2 t \; dt \\ &= \cos t \cdot \sin t + t - \int \cos^2 t \; dt = \cos t \cdot \sin t + t - I \end{aligned}$$

και άρα

$$2I = \cos t \cdot \sin t + t \Rightarrow I = \frac{\cos t \cdot \sin t + t}{2} \tag{1}$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \arctan t \; dt$.

Λύση.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan t \; dt = \int_1^e (t)' \arctan t \; dt &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 t (\arctan t)' \; dt \\ &= [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 t \cdot \frac{1}{t^2+1} \; dt \\ &\overset{(u=t^2+1,\; du=2tdt)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u} \; du \\ &= \frac{\pi}{4} - [\ln u]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln 2 \end{aligned}$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} \; dx$$

Λύση. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Τότε $x = u^2$ οπότε $dx = 2udu$ και άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx &= 2\int \frac{\arctan u}{u(1+u^2)} u\, du \\ &= 2\int \frac{\arctan u}{1+u^2}\, du \\ &= 2\int \arctan u (\arctan u)'\, du \\ &= \int \left(\arctan^2 u\right)'\, du \\ &= \arctan^2 u = \arctan^2\left(\sqrt{x}\right)^2.\end{aligned}$$

Άσκηση 4. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cosh^2 t\, dt$.

(β) Δείξτε ότι

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2}.$$

(γ) Βρείτε το μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}I = \int \cosh^2 t\, dt = \int \cosh t (\sinh t)'\, dt &= \cosh t \sinh t - \int (\cosh t)' \sinh t\, dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int \sinh^2 t\, dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int (\cosh^2 t - 1)\, dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t\, dt + t = \cosh t \sinh t + t - I\end{aligned}$$

και άρα $I = \dfrac{\cosh t \sinh t + t}{2}$.

(β) Θυμίζουμε ότι

$$(\cosh u)^2 - (\sinh u)^2 = 1$$

και άρα αφού $\cosh u \geq 1 > 0$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u}$$

Επίσης, η $\sinh x$ έχει αντίστροφη που δίνεται από τον τύπο

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Άρα για $u = \sinh^{-1} x$ παίρνουμε

$$\sinh\left(\sinh^{-1} x\right) = x \text{ και } \cosh\left(\sinh^{-1} x\right) = \sqrt{1+x^2}$$

Θέτοντας $x = \sinh t \Leftrightarrow t = \sinh^{-1} x$ και άρα $dx = (\sinh t)'dt = \cosh t\ dt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\ dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\ dt &= \int \cosh^2 t\ dt \\ &= \frac{1}{2}(\cosh t \cdot \sinh t + t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\sinh^{-1} x\right)\cdot \sinh\left(\sinh^{-1} x\right) + \sinh^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cosh\left(\sinh^{-1} x\right)\cdot x + \sinh^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\end{aligned}$$

(γ) Έχουμε

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\ dy$$

όπου θέσαμε $y = 2x$ και $dy = 2dx$. Από το (β) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\ dx &= \frac{1}{2}\left[\left(y\sqrt{1+y^2} + \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right)\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) \\ &= \sqrt{5} + \ln\sqrt{2+\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης με παραμετρική αναπαράσταση

$$x(t) = \cos^3 t,\ y(t) = \sin^3 t,\ t \in [0, \pi/2]$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\ \cos^2 t\ (-\sin t))^2\ +\ (3\ \sin^2 t\ \cos t)^2}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^4 t\ \sin^2 t\ +\ 9\ \sin^4 t\ \cos^2 t}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^2 t\ \sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)}\ dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 3\ |\cos t \cdot \sin t|\ dt = 3\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\ dt\end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\ dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)' \cdot \sin t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)'\ dt = \frac{1}{2}\left(\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)\right) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L = 3/2$.

Άσκηση 6. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y = \ln(1-x^2)$, $x \in [0, 1/2]$.

Λύση. Έχουμε $f(x) = \ln(1-x^2)$ και άρα

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}(1-x^2)' = \frac{-2x}{1-x^2}$$

για κάθε $x \in [0, 1/2]$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} L = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\, dx &= \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\, dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\, dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{2-(1-x^2)}{1-x^2}\, dx \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{1-x^2} - 1\right) dx \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - 1\right) dx \\ &= [-\ln(1-x) + \ln(1+x) - x]_0^{1/2} \\ &= \left[\ln\frac{1+x}{1-x} - x\right]_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^k}\, dx = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+1} \text{ αν } k = 1 \\ -\dfrac{1}{2(k-1)} \cdot \dfrac{1}{(x^2+1)^{k-1}} \text{ αν } k \geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

Λύση. Θέτουμε $u = x^2+1$, $du = 2xdx$.

Αν $k = 1$ τότε $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \ln\sqrt{x^2+1}$.

Αν $k \geq 2$, $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^k}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{u^{k-1}} = -\frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}$.

Άσκηση 8. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω $I_k = \displaystyle\frac{1}{(x^2+1)^k}\, dt$. Δείξτε ότι

$$I_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{t}{(x^2+1)^k}.$$

Λύση. Έχουμε $(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ και

$$\left(\frac{1}{(x^2+1)^k}\right)' = -\frac{k(x^2+1)^{k-1}2t}{(x^2+1)^{2k}} = -2k \cdot \frac{t}{(x^2+1)^{k+1}} \tag{3}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx &= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{k+1}} \\
&= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)^{k}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx \\
&= I_k - \int x\cdot \frac{x}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx \\
&\overset{(3)}{=} I_k + \frac{1}{2k}\int x\cdot \left(\frac{1}{(x^2+1)^k}\right)'\,dx \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(x\cdot\frac{1}{(x^2+1)^k} - \int (x)'\cdot \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx\right) \\
&= I_k + \frac{1}{2k}\left(\frac{x}{(x^2+1)^k} - I_k\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^k}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 9. Δείξτε ότι το εμβαδό E της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ δίνεται από τον τύπο $E=\pi ab$.

Λύση. Λύνοντας την εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ως προς y, έχουμε ότι συνάρτηση

$$f(x)=y=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[-a,a]$$

έχει γραφική παράσταση το άνω τμήμα της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Επομένως το εμβαδό της έλλειψης είναι

$$E=2\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2ba\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy = \pi ab$$

όπου θέσαμε $y=x/a$ και $dy=dx/a$ και χρησιμοποιήσαμε ότι $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy=\pi/2$ (εμβαδό ημικυκλίου ακτίνας $R=1$).

Άσκηση 10. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$$

Λύση. Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $y=x+2$ και άρα $x=y-2$ και $dx=dy$. Οπότε

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{y-2}{y^2+1}\,dy = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy - 2\int \frac{1}{y^2+1}\,dy$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $z = y^2 + 1$ και άρα $dz = 2ydy \Rightarrow ydy = dz/2$. Συνεπώς,

$$\int \frac{y}{y^2+1}\, dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2}\ln z = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\left(\ln(x+2)^2+1\right) = \ln\sqrt{(x+2)^2+1}.$$

Για το δεύτερο έχουμε

$$\int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y = \arctan(x+2).$$

Τελικά,

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx = \ln\sqrt{(x+2)^2+1} - 2\arctan(x+2).$$

Άσκηση 11. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx$.

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $t = e^x$ και άρα $dt = e^x dx = tdx$, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\, dt = \int \frac{t+1}{t(t^2+1)}\, dt &= \int \frac{t}{t(t^2+1)}\, dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}\, dt + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt \\ &= \arctan t + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt.\end{aligned}$$

Με απλά κλάσματα βλέπουμε ότι

$$\int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt = \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{t}{t^2+1}\, dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$$

Από τα παραπάνω και αφού $e^x = t$, παίρνουμε

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\, dx = \arctan(e^x) + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1).$$

Άσκηση 12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\, dx$.

Λύση. Θέτουμε

$$x = 2\arctan t \Leftrightarrow t = \tan\frac{x}{2}$$

και άρα

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Από γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{και} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x+\sin x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \ln 2.$$

Άσκηση 13. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+25}\,dx.$

Λύση. (i) Διασπάμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+1)}$$

και άρα

$$A+B=0, B+C=0, A+C=1$$

Συνεπώς $A=C=1/2$, $B=-1/2$. Άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x\end{aligned}$$

(ii) Έχουμε

$$\int \frac{x}{x^2+6x+25}\,dx = \int \frac{x}{x^2+6x+9+16}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{x}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $y=\frac{x+3}{4} \Rightarrow x=4y-3$, $dx=4dy$ οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+6x+25}\,dx = \frac{4}{16}\int \frac{4y-3}{y^2+1}\,dy &= \int \frac{y}{y^2+1}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\\ &= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \frac{3}{4}\arctan y\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x+3)^2}{16}+1\right) - \frac{3}{4}\arctan\left(\frac{x+3}{4}\right)\end{aligned}$$

Άσκηση 14. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\,dx.$

Λύση. (i) Έχουμε

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{x-1}{x^2-4x+4+1}\,dx = \int \frac{x-1}{(x-2)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$, $dx = dy$ οπότε

$$\int \frac{x-1}{(x-1)^2+1}\, dx = \int \frac{y+1}{y^2+1}\, dy = \int \frac{y}{y^2+1}\, dy + \int \frac{1}{y^2+1}\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \arctan y$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left((x-2)^2+1\right) - \arctan(x-2)$$

(ii) Θέτουμε $y = e^x$. Έχουμε $dy = e^x dx$ και

$$\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\, dx = \int \frac{1}{y^3+y^2}\, dy = \int \frac{1}{y^2(y+1)}\, dy$$
$$\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y+1}$$
$$Ay(y+1) + B(y+1) + Cy^2 = 1$$
$$(A+C)y^2 + (A+B)y + B = 1$$

$B = 1$, $A = -1$ $C = 1$

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y+1}$$
$$\int \frac{1}{y^2(y+1)}\, dy = -\int \frac{1}{y}\, dy + \int \frac{1}{y^2}\, dy + \int \frac{1}{y+1}\, dy = -\ln|y| - \frac{1}{y} + \ln|y+1|$$
$$\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\, dx = -\ln(e^x) - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1) = -x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1)$$

Άσκηση 15. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ όπου $x(t) = \frac{1}{3}t^3$ και $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Λύση. Έχουμε

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t^4+t^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t^2(t^2+1)}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\, dt$$

Θέτουμε $u = t^2+1$, $du = 2tdt$ και έχουμε

$$L = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big[u^{3/2}\Big]_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Άσκηση 16. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = 1 - \sin^3 t,\ y(t) = \cos^3 t,\ t \in [0, \pi/2]$$

Λύση. Έχουμε

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\ \cos^2 t\ (-\sin t))^2\ +\ (3\ \sin^2 t\ \cos t)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^4 t\ \sin^2 t\ +\ 9\ \sin^4 t\ \cos^2 t}\, dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^2 t\ \sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} 3\,|\cos t \cdot \sin t|\, dt = 3\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t\, dt$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t \; dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)' \cdot \sin t \; dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)' \; dt = \frac{1}{2} \left(\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0) \right) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L = 3/2$.

Άσκηση 17. Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_c^d f^{-1}(x) \; dx = bd - ac - \int_a^b f(x) \; dx$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = f(t)$, $t \in [a, b]$ και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_c^d f^{-1}(x) \; dx = \int_a^b f^{-1}(f(t)) f'(t) \; dt &= \int_a^b t f'(t) \; dt \\ &= [tf(t)]_a^b - \int_a^b t' f(t) \; dt \\ &= bd - ac - \int_a^b f(t) \; dt \end{aligned}$$

Άσκηση 18. Για κάθε $n = 0, 1, \ldots$ θέτουμε

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x \; dx$$

(i) Βρείτε τα I_0 και I_1. (ii) Δείξτε ότι $I_n = \dfrac{n-1}{n} \; I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Λύση. (1) (i) $I_0 = \int_0^{2\pi} \; dx = 2\pi$ και $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x \; dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$.
(ii) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x \; dx &= \int_0^{2\pi} \cos^{n-1} x (\sin x)' \; dx \\ &= [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\cos^{n-1} x)' \sin x \; dx \\ &= -(n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (\cos x)' \sin x \; dx \\ &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \sin^2 x \; dx \\ &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \; dx \\ &= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \; dx - (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^n x \; dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

και άρα

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} \; I_{n-2}$$

για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 19. (α) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)g''(x)\ dx = f(b)g'(b) - f'(b)g(b) - f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + \int_a^b f''(x)g(x)\ dx$$

(β) Αν $f(x) = \arctan x$ $g(x) = \cos x$ υπολογίστε με βάση το (α) το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \cos x\ dx.$$

Λύση. (α) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα Ολοκλήρωσης κατά παράγοντες δύο φορές ως εξής:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g''(x)\ dx &= f(x)g'(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g'(x)\ dx \\
&= f(x)g'(x)|_a^b - \left(f'(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f''(x)g(x)\ dx \right) \\
&= \left(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\right)|_a^b + \int_a^b f''(x)g(x)\ dx \\
&= f(b)g'(b) - f'(b)g(b) - f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + \int_a^b f''(x)g(x)\ dx
\end{aligned}$$

(β) Θέτουμε $f(x) = \arctan x$ και $g(x) = \cos x$. Τότε $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = -\sin x$ και $g''(x) = -\cos x$. Άρα από το (i),

$$\begin{aligned}
-\int_0^\pi f(x)\cos x\ dx &= -f(\pi)\sin\pi - f'(\pi)\cos\pi + f(0)\sin 0 + f'(0)\cos 0 + \int_a^b f''(x)\cos x\ dx \\
&= \frac{1}{1+\pi^2} + \frac{1}{1+0^2} + \int_a^b f''(x)\cos x\ dx = \frac{1}{1+\pi^2} + 1 + \int_a^b f''(x)\cos x\ dx
\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\cos x\ dx = \int_0^\pi f(x)\cos x\ dx + \int_0^\pi f''(x)\cos x\ dx = -\frac{1}{1+\pi^2} - 1$$

Άσκηση 20. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$$

Συμπεράνετε ότι αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \neq 0$.

Λύση. Θέτουμε $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) \tag{4}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b - a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$$