

ΣΑΤΜ 2025
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

Άσκηση 1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: (i) $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx$. (ii) $\int \frac{x}{x^2+6x+25} dx$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα: (i) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx$. (ii) $\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}} dx$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ όπου $x(t) = \frac{1}{3}t^3$ και $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x(t) = 1 - \sin^3 t$, $y(t) = \cos^3 t$, για κάθε $t \in [0, \pi/2]$.

Άσκηση 5. Έστω $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση. Δείξτε ότι $\int_c^d f^{-1}(x) dx = bd - ac - \int_a^b f(x) dx$.

Άσκηση 6. Για κάθε $n = 0, 1, \dots$ θέτουμε $I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx$ (i) Βρείτε τα I_0 και I_1 . (ii) Δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 7. (α) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)g''(x) dx = f(b)g'(b) - f'(b)g(b) - f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + \int_a^b f''(x)g(x) dx$$

(β) Αν $f(x) = \arctan x$ $g(x) = \cos x$ υπολογίστε με βάση το (α) το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \cos x dx$.

Άσκηση 8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Συμπεράνετε ότι αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε $\int_a^b f(x) dx \neq 0$.