ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

Άσκηση 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cos^2 t \, dt$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \arctan t \, dt$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx$$

Άσκηση 4. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cosh^2 t \, dt$.

(β) Δείξτε ότι

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{2}.$$

(γ) Βρείτε το μήκος της καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης με παραμετρική αναπαράσταση

$$x(t) = \cos^3 t, \ y(t) = \sin^3 t, \ t \in [0, \pi/2]$$

Άσκηση 6. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης με εξίσωση $y = \ln(1-x^2)$, $x \in [0, 1/2]$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι το εμβαδό E της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ δίνεται από τον τύπο $E = \pi ab$.

Άσκηση 8. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^k} \, dx = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+1} & \text{αν } k = 1 \\ -\dfrac{1}{2(k-1)} \cdot \dfrac{1}{(x^2+1)^{k-1}} & \text{αν } k \geq 2 \end{cases} \tag{1}$$

Άσκηση 9. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω $I_k = \dfrac{1}{(x^2+1)^k} \, dt$. Δείξτε ότι

$$I_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right) I_k + \frac{1}{2k} \cdot \frac{t}{(x^2+1)^k}.$$

Άσκηση 10. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5} \, dx$$

Άσκηση 11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1} \, dx$.

Άσκηση 12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x + \sin x} \, dx$.

Άσκηση 13. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:(i) $\int \dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} \, dx$. (ii) $\int \dfrac{x}{x^2+6x+25} \, dx$.

Άσκηση 14. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:(i) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$. (ii) $\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\,dx$.

Άσκηση 15. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης $\mathbf{r}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ όπου $x(t)=\frac{1}{3}\,t^3$ και $y(t)=\frac{1}{2}\,t^2$ για κάθε $t\in[0,1]$.

Άσκηση 16. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x(t)=1-\sin^3 t,\ y(t)=\cos^3 t$, για κάθε $t\in[0,\pi/2]$.

Άσκηση 17. Έστω $f:[a,b]\to[c,d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση. Δείξτε ότι $\int_c^d f^{-1}(x)\,dx = bd-ac-\int_a^b f(x)\,dx$.

Άσκηση 18. Για κάθε $n=0,1,\dots$ θέτουμε $I_n=\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx$ (i) Βρείτε τα I_0 και I_1. (ii) Δείξτε ότι $I_n=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}$ για κάθε $n\geq 2$.

Άσκηση 19. (α) Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)g''(x)\,dx = f(b)g'(b)-f'(b)g(b)-f(a)g'(a)+f'(a)g(a)+\int_a^b f''(x)g(x)\,dx$$

(β) Αν $f(x)=\arctan x$ $g(x)=\cos x$ υπολογίστε με βάση το (α) το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\cos x\,dx$.

Άσκηση 20. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$. Συμπεράνετε ότι αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$ τότε $\int_a^b f(x)\,dx\neq 0$.