

ΣΕΜΦΕ 2025
Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

Άσκηση 1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a) = a^2$ για κάθε a άρρητο. Δείξτε ότι $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, αύξουσα με την ιδιότητα $f(0) = 0$ και $|f(x)| \geq |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $|f(x)| > 1/\delta$ δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Άσκηση 4. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και τέτοιες ώστε $\min\{f(x) : x \in [a, b]\} = \min\{g(x) : x \in [a, b]\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Άσκηση 5. Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α) Η συνάρτηση $f : (0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ 2 & x \in (1, 2] \end{cases}$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιος} \\ 1 & n \text{ περιττός} \end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 6. (α) Έστω $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. (i) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. (ii) Ισχύει το ίδιο για το γινόμενο ή το πηλίκο.

(β) Έστω $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(X) \subseteq Y$. Αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς δείξτε ότι και η συνθεσή τους $F(x) = f(g(x))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 7. Είναι σωστό ότι αν μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε είναι **ομοιομορφισμός** (δηλαδή και η ίδια και η αντίστροφή της είναι συνεχείς συναρτήσεις) ?

Λύση. Ναι είναι σωστό: Έστω $f : I \rightarrow J$ γνησίως μονότονη όπου I, J διαστήματα και $J = f(I)$. Γνωρίζουμε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση με πεδίο τιμών διάστημα (ασχέτως αν το πεδίο ορισμού είναι διάστημα ή όχι) είναι συνεχής. Άρα επειδή το πεδίο τιμών της f είναι το διάστημα J η f είναι συνεχής. Ομοίως η $f^{-1} : J \rightarrow I$ είναι γνησίως μονότονη και έχει πεδίο τιμών το διάστημα I . Άρα είναι και αυτή συνεχής.

Άσκηση 8. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ καλείται **Lipschitz** αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|$$

για όλα τα $x, x' \in X$.

(α) Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά δεν είναι Lipschitz.

(γ) Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι Lipschitz αν και μόνο αν έχει φραγμένη παράγωγο.

(δ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $a \in [-1, 1]$ υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n \neq 0$, $x_n \rightarrow 0$ και $f(x_n) \rightarrow a$.

(γ) Δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 10. Έστω $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f μεταφέρει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 11. Ορίζουμε $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } x \text{ ρητός και ο } x \text{ σε ανάγωγη μορφή γράφεται } x = \frac{m}{n} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ασυνεχής στους ρητούς και συνεχής στους άρρητους.

Άσκηση 12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. (α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}$$

(β) Συμπεραίνετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν

$$\sup\{f(x) : x < x_0\} = \inf\{f(x) : x > x_0\} = f(x_0)$$