

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

- (α) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f(x) > \frac{4}{5}$.
- (β) Η $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής.
- (γ) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
- (δ) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
- (ε) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.
- (στ) Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο ξ , τότε είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ζ) Αν η f είναι συνεχής στο (a, b) και $f(q) = 0$ για κάθε ρητό $q \in (a, b)$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Ασκηση 2. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Ασκηση 3. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Ασκηση 4. (α) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$.

(β) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ συνεχείς συναρτήσεις με $\max(f) = \max(g)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Ασκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0) = x_0.$$

Ασκηση 6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(y) \geq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι επί.