

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν $k^2 a_k \rightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει.

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγχλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγχλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγχλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγχλίνει απολύτως.

Υπόδειξη: (α) Σωστό. Θεωρούμε την $b_k = \frac{1}{k^2}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_k}{\frac{1}{k^2}} = k^2 a_k \rightarrow 0.$$

Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγχλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει.

(β) Λάθος. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ συγχλίνει από το κριτήριο του Leibniz, όμως η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

αποκλίνει.

(γ) Σωστό. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει, άρα η ακολουθία $s_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη. Η ακολουθία $b_k = \frac{1}{k}$

είναι φθίνουσα και μηδενική, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγχλίνει από το κριτήριο Dirichlet.

(δ) Σωστό. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγχλίνει, έχουμε ότι $a_k^2 \rightarrow 0$, άρα $|a_k| = \sqrt{a_k^2} \rightarrow 0$. Συνεπώς, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|a_k| \leq 1$ για κάθε $k \geq k_0$. Τότε, για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε ότι

$$|a_k^3| = |a_k| |a_k^2| = |a_k| a_k^2 \leq a_k^2$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγχλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^3|$ συγχλίνει, δηλαδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγχλίνει απολύτως.

□

Ασκηση 2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \quad (\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad (\gamma) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \quad (\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}.$$

Υπόδειξη: (α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{2^k k!}{(k)^k}} = 2 \left(\frac{k}{k+1} \right)^k \rightarrow 2/e < 1,$$

και άρα η σειρά συγχλίνει.

(β) Αφού η ακολουθία $\frac{1}{2k+1}$ είναι φθίνουσα και συγχλίνει στο 0, η σειρά συγχλίνει από το κριτήριο για εναλλασσόμενες σειρές (κριτήριο Leibniz).

(γ) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο συμπίκνωσης (η ακολουθία $\frac{1}{k \ln k}$ έχει θετικούς όρους και είναι φθίνουσα). Έχουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)k}$$

αποκλίνει (αρμονική σειρά), άρα και η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ αποκλίνει.

(δ) Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}}{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \rightarrow e > 0,$$

και άρα, από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς (η σύγκριση γίνεται με την αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$), η σειρά αποκλίνει. $\square$

Άσκηση 3. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2 + k^2 a_k}$$

συγχλίνει.

(β) Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, να δείξετε ότι και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2 + a_k}$$

αποκλίνει επίσης.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε ότι

$$0 \leq \frac{a_k}{2 + k^2 a_k} \leq \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2},$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα.

(β) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- η ακολουθία (a_k) είναι άνω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $a_k \leq M$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\frac{a_k}{2 + a_k} \geq \frac{a_k}{2 + M},$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα.

- η ακολουθία (a_k) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{s_k}) της (a_k) με

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{s_k} = +\infty.$$

Επομένως,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{s_k}}{2 + a_{s_k}} = 1,$$

και άρα από το κριτήριο απόκλισης η δοσμένη σειρά αποκλίνει.

□

Άσκηση 4. (Εκτίμηση σφάλματος για εναλλάσσουσες σειρές)

- (i) Έστω (a_n) μηδενική και φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = S,$$

να δείξετε ότι

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

όπου (s_n) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της παραπάνω εναλλάσσουσας σειράς.

- (ii) Να προσδιορίσετε το άθροισμα S της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Υπόδειξη: (i) Παρατηρούμε ότι η (s_{2k}) είναι αύξουσα και η (s_{2k+1}) είναι φθίνουσα. Επίσης, $s_{2k} \rightarrow S$ και $s_{2k+1} \rightarrow S$. Έπεται ότι:

- αν n άρτιος, τότε $S \leq s_{n+1}$ και άρα

$$S - s_n \leq s_{n+1} - s_n = a_{n+1}.$$

- αν n περιττός, τότε $S \geq s_{n+1}$ και άρα

$$-(S - s_n) \leq -(s_{n+1} - s_n) = a_{n+1}.$$

Οπότε,

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Αφού θέλουμε ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, θα πρέπει το σφάλμα να είναι μικρότερο από $\frac{1}{1000}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση από το (i) θα πρέπει να επιλέξουμε τον n έτσι ώστε

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}.$$

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι αρκεί να θεωρήσουμε $n \geq 6$: σύμφωνα με το (i),

$$|S - s_6| \leq a_7 = \frac{1}{7!} < \frac{1}{1000}.$$

Άρα το $s_6 = 0,631944\dots$ συμπίπτει σε τουλάχιστον τρία δεκαδικά ψηφία με το άθροισμα S της σειράς και επομένως έχουμε ότι $S = 0,631$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. □

Άσκηση 5. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Υπόδειξη: Η σειρά έχει θετικούς όρους. Για να δείξουμε ότι συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_{m^2} &= \sum_{k=1}^{m^2} a_k = \sum_{k=1}^m a_{k^2} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq m^2 \\ k \neq s^2}} a_k \\ &\leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M < +\infty. \end{aligned}$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $s_n \leq s_{n^2} \leq M$. Δηλαδή, η (s_n) είναι άνω φραγμένη. □

Άσκηση 6. Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, άρα $b_k \rightarrow 0$. Έπεται ότι η (b_k) είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|b_k| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$|a_k b_k| \leq M |a_k|$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k|$ συγκλίνει. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως. □

Άσκηση 7. Έστω $a_k > 0$ και $b_k > 0$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και ότι $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ για κάθε $k \geq 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση βλέπουμε ότι $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \leq \frac{a_k}{b_k}$ για κάθε $k \geq 1$. Δηλαδή, η ακολουθία $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ είναι φθίνουσα, και αφού έχουμε επίσης $\frac{a_k}{b_k} > 0$, υπάρχει το $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \geq 0$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης. □