

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Έστω (α_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν $\alpha_k \rightarrow 0$ τότε η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(δ) Αν $\alpha_k \rightarrow 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k$ συγκλίνει.

(ε) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k}$ συγκλίνει.

(στ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: (α) *Λάθος.* Η ακολουθία $\alpha_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, όμως η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ δεν είναι φραγμένη (τείνει στο $+\infty$).

(β) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $\alpha_k = (-1)^{k-1}$, τότε έχουμε $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός και $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή, η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ είναι φραγμένη. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ αποκλίνει, διότι $\alpha_k \not\rightarrow 0$.

(γ) *Λάθος.* Θεωρήστε την $\alpha_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(δ) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε την $\alpha_k = \frac{(-1)^k}{k}$, τότε $\alpha_k \rightarrow 0$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(ε) *Λάθος.* Θεωρήστε την $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(στ) *Λάθος.* Από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει. $\square$

Άσκηση 2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(α) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}, \quad (β) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{4^k}, \quad (γ) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}, \quad (δ) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

Υπόδειξη: (α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας. Αν $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ τότε

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \rightarrow \frac{1}{e} < 1,$$

άρα η σειρά συγχλίνει.

(β) Εξετάζουμε αν η σειρά συγχλίνει απολύτως, δηλαδή αν συγχλίνει η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}$. Αν $b_k = \frac{k^3}{4^k}$ τότε για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)^3}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{k^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{k+1}{k} \right)^3 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot 1^3 = \frac{1}{4} < 1,$$

άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{4^k}$ συγχλίνει απολύτως, και ειδικότερα συγχλίνει.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$c_k := \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{k(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{1}{k(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}.$$

Αν $t_k = \frac{1}{k^{3/2}}$ τότε $\frac{c_k}{t_k} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \rightarrow \frac{1}{2} > 0$. Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ συγχλίνει (p -σειρά με $p = 3/2 > 1$) το κριτήριο της ισοδύναμης συμπεριφοράς (ή και το οριακό κριτήριο σύγκρισης) μας δίνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$ συγχλίνει.

(δ) Για την $\sum_{k=2}^{\infty} \delta_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο συμπίκνωσης. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \delta_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln(2^k))^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Έπεται ότι η $\sum_{k=2}^{\infty} \delta_k$ συγχλίνει κι αυτή. □

Ασκηση 3. Έστω ότι $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγχλίνει, αποδείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2}$$

συγχλίνουν επίσης.

Υπόδειξη: (α) Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγχλίνει, έχουμε $\alpha_k \rightarrow 0$. Επομένως, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq m$,

$0 \leq \alpha_k \leq 1$. Τότε, για κάθε $k \geq m$ έχουμε $0 \leq \alpha_k^2 \leq \alpha_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγχλίνει.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το οριακό κριτήριο σύγκλισης: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγχλίνει, άρα $\alpha_k \rightarrow 0$. Αφού

$$\frac{\alpha_k^2}{\alpha_k} = \alpha_k \rightarrow 0,$$

έπεται ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγχλίνει.

(β) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k} \leq \alpha_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k}$ συγχλίνει.

(γ) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{\alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2} \leq \alpha_k^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε το (α). □

Ασκηση 4. Έστω $(\alpha_k), (\beta_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ συγχλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ συγχλίνει απολύτως.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση, οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ συγχλίνουν, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2} \alpha_k^2 + \frac{1}{2} \beta_k^2)$ συγχλίνει κι αυτή. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $|\alpha_k \beta_k| \leq \frac{1}{2} \alpha_k^2 + \frac{1}{2} \beta_k^2$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \beta_k|$ συγχλίνει. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ συγχλίνει απολύτως. □

Άσκηση 5. (α) Έστω (α_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k > 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγχλίνει.

(β) Εξετάστε αν συγχλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$.

Υπόδειξη: (α) Θεωρούμε $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιον ώστε $1 < \alpha < s := \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας με $\varepsilon = s - \alpha > 0$, βρίσκουμε k_0 τέτοιον ώστε $\alpha_k > \alpha$ για κάθε $k \geq k_0$.

Συνεπώς, για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε

$$0 < \frac{1}{k^{\alpha_k}} \leq \frac{1}{k^{\alpha}}.$$

Ο α είναι σταθερός (δεν εξαρτάται από το k) και μεγαλύτερος από 1, άρα η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ συγχλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγχλίνει, άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγχλίνει.

(β) Θεωρούμε την $\beta_k = 1/k$. Έχουμε

$$\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{k}{k^{k/k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \rightarrow 1 > 0.$$

Από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς, η σειρά αποκλίνει (διότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει). □

Άσκηση 6. Έστω (α_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγχλίνει τότε $k\alpha_k \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$. Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι $s_n \rightarrow s$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{4}$. Έπεται ότι αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$\alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n = |s_n - s_m| < |s_n - s| + |s - s_m| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ειδικότερα, αν $n \geq 2n_0$, παίρνοντας $m = n_0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (α_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\frac{\varepsilon}{2} > \alpha_{n_0+1} + \dots + \alpha_n \geq (n - n_0)\alpha_n \geq \frac{n\alpha_n}{2},$$

διότι $n - n_0 \geq \frac{n}{2}$. Δηλαδή, αν $n \geq 2n_0$ έχουμε $n\alpha_n < \varepsilon$. Έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\alpha_n) = 0$.

Άλλος τρόπος: Παρατηρούμε ότι, αφού η (α_k) είναι φθίνουσα,

$$0 \leq n\alpha_{2n} \leq \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{2n} = s_{2n} - s_n \rightarrow s - s = 0,$$

άρα $2n\alpha_{2n} \rightarrow 0$. Έχουμε επίσης

$$0 \leq (2n+1)\alpha_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n} 2n\alpha_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n} 2n\alpha_{2n} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0,$$

άρα $(2n+1)\alpha_{2n+1} \rightarrow 0$. Αφού η υπακολουθία των άρτιων και η υπακολουθία των περιττών όρων της $(k\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μηδενικές ακολουθίες, συμπεραίνουμε ότι $k\alpha_k \rightarrow 0$. □

Άσκηση 7. Δίνεται η ακολουθία (α_k) με αναδρομικό τύπο

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2 + \alpha_k^2}, \quad \alpha_1 > 0.$$

Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών (α_k) , $(\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k})$ και να μελετήσετε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \alpha_k \text{ και } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\alpha_k + \frac{1}{k} \right).$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2+\alpha_k^2} < \alpha_k$. Δηλαδή, η (α_k) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και άρα συγκλίνουσα. Αν α είναι το όριο της, τότε από τον αναδρομικό τύπο παίρνουμε ότι $\alpha(2+\alpha^2) = \alpha$ και συνεπώς $\alpha = 0$. Χρησιμοποιώντας πάλι τον αναδρομικό τύπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{(k+1)^2 \alpha_{k+1}}{k^2 \alpha_k} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \frac{1}{2+\alpha_k^2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

και αυτό με τη σειρά του μας δίνει από το κριτήριο του λόγου ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \alpha_k$ συγκλίνει. Τέλος, αφού η ακολουθία $\alpha_k + \frac{1}{k}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\alpha_k + \frac{1}{k})$ συγκλίνει, από το κριτήριο Leibniz. $\square$