

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(α) Αν $k^2 a_k \rightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση 2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(α) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \quad (β) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad (γ) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \quad (δ) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}.$$

Άσκηση 3. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

(α) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2 + k^2 a_k}$$

συγκλίνει.

(β) Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, να δείξετε ότι και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2 + a_k}$$

αποκλίνει επίσης.

Άσκηση 4. (Εκτίμηση σφάλματος για εναλλάσσουσες σειρές)

(i) Έστω (a_n) μηδενική και φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν υποθέσουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = S,$$

να δείξετε ότι

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

όπου (s_n) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της παραπάνω εναλλάσσουσας σειράς.

(ii) Να προσδιορίσετε το άθροισμα S της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Άσκηση 5. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Άσκηση 6. Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Άσκηση 7. Έστω $a_k > 0$ και $b_k > 0$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και ότι $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ για κάθε $k \geq 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.