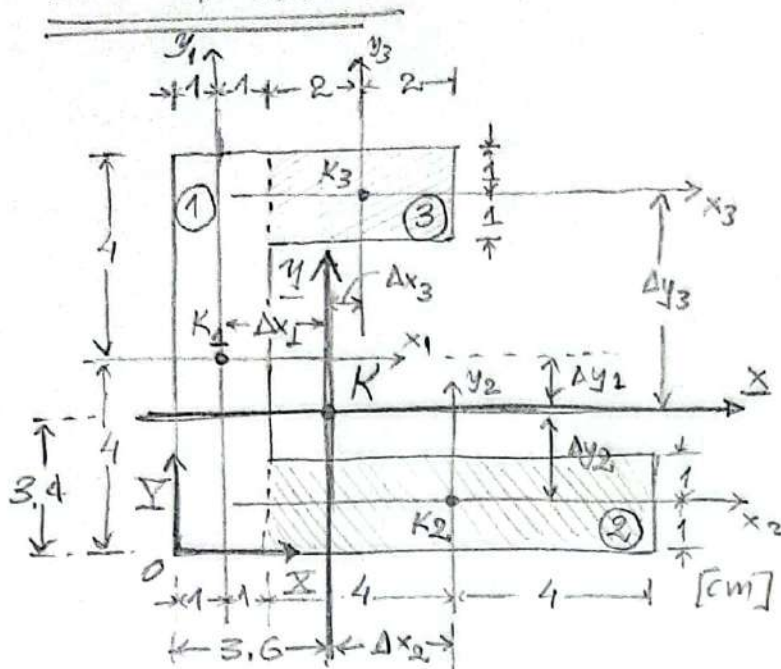


32.α^π ΑΣΚΗΣΗ



Από υπολογισμό το γεωμετρικό κέντρο της διατομής, να υπολογιστεί ο ροπών (I_{ij}) επιφανειακών ροών 2^{ης} τάξης της διατομής, ως προς το κέντρο βάρους Kxy. Στη συνέχεια να βρεθεί το κίριο έγκυφα του ροπών (I_{ij}) στο σημείο K.

Λύση

Προσδιορισμός γεωμετρικού κέντρου ως προς το OXY :

$$\bar{X}_K = \frac{\sum \bar{X}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\bar{X}_{K1} A_1 + \bar{X}_{K2} A_2 + \bar{X}_{K3} A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1 \times (2 \times 8) + 6 \times (8 \times 2) + 4 \times (4 \times 2)}{(2 \times 8) + (8 \times 2) + (4 \times 2)} = \frac{16 + 96 + 32}{40} = 3.6 \text{ cm}$$

$$\bar{Y}_K = \frac{\sum \bar{Y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\bar{Y}_{K1} A_1 + \bar{Y}_{K2} A_2 + \bar{Y}_{K3} A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4 \times (2 \times 8) + 1 \times (8 \times 2) + 7 \times (4 \times 2)}{(2 \times 8) + (8 \times 2) + (4 \times 2)} = \frac{64 + 16 + 56}{40} = 3.4 \text{ cm}$$

Προσδιορισμός ροπών I ως προς το Kxy :

Με άθροιση των I^(j), j=1,2,3, των επιφανειών της διατομής, ως προς το Kxy (με θεωρία Steiner για υδρική τμήση):

$$I_{xx}^{(1)} = I_{x_1 x_1} + \Delta y_1^2 A_1 = \frac{b_1^3 h_1^3}{12} + (4 - 3.4)^2 (2 \times 8) = \frac{2 \times 8^3}{12} + 0.6^2 \times 16 = 91.09 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy}^{(1)} = I_{y_1 y_1} + \Delta x_1^2 A_1 = \frac{b_1^3 h_1}{12} + [-(3.6 - 1)]^2 (2 \times 8) = \frac{2^3 \times 8}{12} + 2.6^2 \times 16 = 113.49 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy}^{(1)} = I_{x_1 y_1} - \Delta x_1 \Delta y_1 A_1 = 0 - (-2.6)(0.6)(2 \times 8) = 24.96 \text{ cm}^4$$

4-50

$$\underline{I_{xx}}^{(2)} = \underline{I_{x_2x_2}} + \Delta y_2^2 A_2 = \frac{8 \times 2^3}{12} + [-(3.4-1)]^2 (8 \times 2) = \frac{64}{12} + 5.76 \times 16 = 97.49 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I_{yy}}^{(2)} = \underline{I_{y_2y_2}} + \Delta x_2^2 A_2 = \frac{8^3 \times 2}{12} + (6-3.6)^2 (8 \times 2) = 85.33 + 5.76 \times 16 = 177.49 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I_{xy}}^{(2)} = \underline{I_{x_2y_2}} - \Delta x_2 \Delta y_2 A_2 = 0 - (6-3.6) [-(3.4-1)] (8 \times 2) = 2.4 \times 2.4 \times 16 = 92.16 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I_{xx}}^{(3)} = \underline{I_{x_3x_3}} + \Delta y_3^2 A_3 = \frac{4 \times 2^3}{12} + (8-3.4-1)^2 (4 \times 2) = 2.67 + 12.96 \times 8 = 106.35 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I_{yy}}^{(3)} = \underline{I_{y_3y_3}} + \Delta x_3^2 A_3 = \frac{4^3 \times 2}{12} + (4-3.6)^2 (4 \times 2) = 10.67 + 0.16 \times 8 = 11.95 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I_{xy}}^{(3)} = \underline{I_{x_3y_3}} - \Delta x_3 \Delta y_3 A_3 = 0 - (4-3.6)(8-3.4-1)(4 \times 2) = -0.4 \times 3.6 \times 8 = -11.52 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I_{xx}} = \underline{I_{xx}}^{(1)} + \underline{I_{xx}}^{(2)} + \underline{I_{xx}}^{(3)} = 91.03 + 97.49 + 106.35 = 294.93 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I_{yy}} = \underline{I_{yy}}^{(1)} + \underline{I_{yy}}^{(2)} + \underline{I_{yy}}^{(3)} = 113.49 + 177.49 + 11.95 = 302.93 \text{ cm}^4$$

$$\underline{I_{xy}} = \underline{I_{xy}}^{(1)} + \underline{I_{xy}}^{(2)} + \underline{I_{xy}}^{(3)} = 24.96 + 92.16 - 11.52 = 105.6 \text{ cm}^4$$

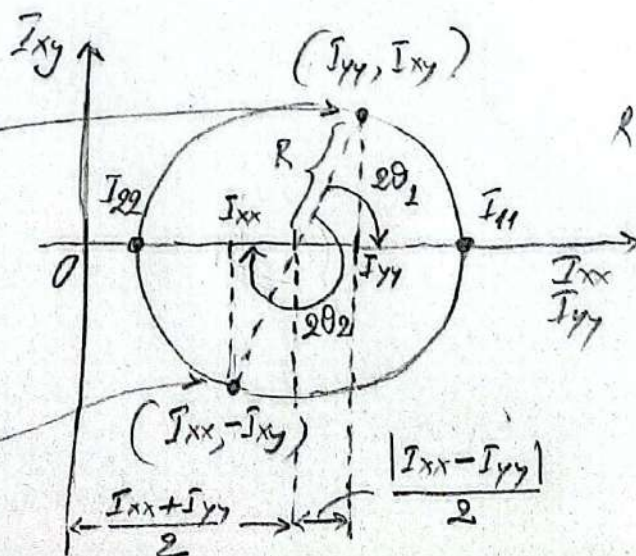
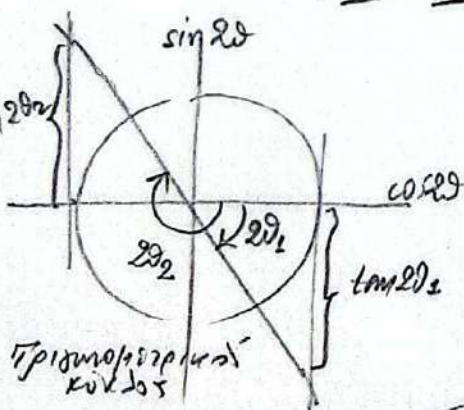
Κρίριο, κριτήριο (δηλ. στο K), ως προς I

Θα είναι σταθμισμένο υπό γωνία θ ως προς το Kxy :

$$\tan 2\theta = \frac{2 \underline{I_{xy}}}{\underline{I_{xx}} - \underline{I_{yy}}} = \frac{211.20}{-8} = -26.4 \Rightarrow \theta_1 = -43.92^\circ, \theta_2 = -133.92^\circ$$

$$2\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{211.2}{-8}\right) = -87.83^\circ \Rightarrow \theta_1 = -43.92^\circ$$

$$2\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{211.2}{-8}\right) - \pi = -267.83^\circ \Rightarrow \theta_2 = -133.92^\circ$$



$$R = \sqrt{\left(\frac{\underline{I_{xx}} - \underline{I_{yy}}}{2}\right)^2 + \underline{I_{xy}}^2}$$

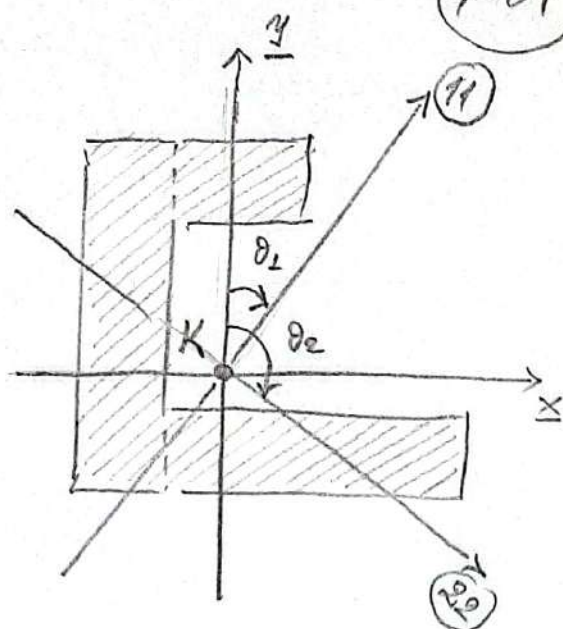
ως προς κεντρικό Mohr

Σύμφωνα με τον τύπο Ixy

$$\underline{I_{xy}} = \underline{I_{xy}}^{(1)} + \underline{I_{xy}}^{(2)} + \underline{I_{xy}}^{(3)}$$

κατά Mohr

$$\underline{I_{xy}} = \underline{I_{xy}}^{(1)} + \underline{I_{xy}}^{(2)} + \underline{I_{xy}}^{(3)}$$



$$I_{11} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} =$$

(22)

$$= \frac{294.93 + 302.93}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{294.93 - 302.93}{2}\right)^2 + (105.6)^2} =$$

$$= 298.93 \pm 105.68 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_{11} = 404.61 \text{ cm}^4 \\ I_{22} = 193.25 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

κύριος τανυστής I στο K :

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 404.61 & 0 \\ 0 & 193.25 \end{pmatrix} \text{ cm}^4$$

και η μέγιστη ανύψωση που αποκτήει η διατομή σε σχέση είναι ως προς τον άξονα (11), ενώ η αντιστοίχη ελαχιστο, ως προς τον άξονα (22)