

ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση
(4ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. Έστω $T \in B(X, Y)$. Να δείξετε ότι

(i)

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup \{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \{\|Tx\| : \|x\| = 1\} .\end{aligned}$$

(ii)

$$\|T\| = \inf \{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \text{ για κάθε } x \in X\} .$$

Ασκηση 2 (Πολλαπλασιαστικός τελεστής). Θεωρούμε τον $X = C[a, b]$ εφοδιασμένο με την $\|\cdot\|_\infty$ και $g \in X$. Ορίζουμε $T : X \rightarrow X$ με τύπο

$$Tf(x) = g(x)f(x), \text{ για κάθε } x \in [a, b] .$$

Να δείξετε ότι $T \in B(X)$.

Ασκηση 3 (Τελεστής δεξιάς μετατόπισης). Έστω $S : l^1 \rightarrow l^1$ με τύπο

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) .$$

Να δείξετε ότι ο S είναι φραγμένος και να βρείτε τη νόρμα του.

Ασκηση 4. Έστω $T : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ με τύπο

$$T(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots), \text{ για κάθε } x = (x_n) \in c_{00} .$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και βρείτε τη νόρμα του. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $\ker T = \{0\}$.