

ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση
Λύσεις του 4ου φυλλαδίου ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω X χώρος με νόρμα και Y γνήσιος υπόχωρος του X . Να δείξετε ότι το σύνολο Y^c είναι πυκνό στον X .

Λύση. Αφού $X = Y \cup Y^c$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in Y$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z \in Y^c$, τέτοιο ώστε $z \in B(x, \varepsilon)$. Αφού ο Y είναι γνήσιος υπόχωρος του X , από το Θεώρημα που είδαμε στο μάθημα, ο Y έχει κενό εσωτερικό και συνεπώς

$$B(x, \varepsilon) \cap Y^c \neq \emptyset$$

από όπου προκύπτει το συμπέρασμα. □

Άσκηση 2. Με c_{00} συμβολίζουμε τον χώρο των τελικά μηδενικών ακολουθιών. Δηλαδή $x = (x_n) \in c_{00}$ εάν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n = 0$, για κάθε $n \geq n_0$. Να δείξετε ότι ο c_{00} δεν μπορεί να είναι χώρος Banach με όποια νόρμα και να τον εφοδιάσουμε.

Λύση. Τα στοιχεία $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ όπου το 1 βρίσκεται στην n -θέση, $n = 1, 2, 3, \dots$, αποτελούν μια αριθμήσιμη βάση του c_{00} και συνεπώς αυτός δεν μπορεί να είναι χώρος Banach με καμία νόρμα. □

Άσκηση 3. Έστω $X = C^1([-1, 1])$. Θέτουμε $\|f\|_1 = \|f\|_\infty$, $\|f\|_2 = \|f'\|_\infty$ και $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$. Να δείξετε ότι

(i) ο $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach,

(ii) η $\|\cdot\|_2$ δεν είναι νόρμα στον X ,

(iii) ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

Λύση.

(i) Αν

$$f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, n = 1, 2, \dots \text{ και } f(x) = |x|, \text{ για κάθε } x \in [-1, 1],$$

τότε η f_n συγχλίνει ομοιόμορφα στην f , δηλαδή $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow +\infty$. Όμως $f \notin X$ και συνεπώς ο X δεν είναι χώρος Banach.

(ii) Αν $f(x) = c$, για κάθε $x \in [-1, 1]$, τότε $\|f\|_2 = \|f'\|_\infty = 0$ ενώ $f \neq 0$. Άρα η $\|\cdot\|_2$ δεν είναι νόρμα στον X ,

(iii) Έστω (f_n) Cauchy ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|$. Τότε οι (f_n) και η (f'_n) είναι Cauchy ακολουθίες με την $\|\cdot\|_\infty$ και συνεπώς $f_n \rightarrow f$ και $f'_n \rightarrow g$ στον $C([-1, 1])$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f' = g$.

Προς αυτή τη κατεύθυνση έστω $\varepsilon > 0$ και $t \in [-1, 1]$. Αφού η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ θα είναι ομοιόμορφα συνεχής και συνεπώς θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|g(t+s) - g(t)| < \varepsilon, \text{ για κάθε } |s| < \delta.$$

Αν $h \in \mathbb{R}$ με $0 < |h| < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t) \right| &= \lim \left| \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} - g(t) \right| \\ &= \lim \left| \frac{1}{h} \int_0^h f'_n(t+s) ds - g(t) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_0^h (g(t+s) - g(t)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη με $f' = g$. Άρα ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

□

Άσκηση 4. Να δείξετε ότι αν ο X είναι χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \rightarrow Y$, όπου Y χώρος με νόρμα, είναι φραγμένος.

Λύση. Έστω ότι $\dim X = n$ και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μία βάση του X . Γνωρίζουμε ότι όλες οι νόρμες στον X είναι ισοδύναμες και έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας θα εργαστούμε με την $\|\cdot\|_2$ η οποία για $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ είναι

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αν $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα του Y τότε

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|Te_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2$$

και άρα ο T είναι φραγμένος, όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. □