ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

Άσκηση 1. Δείξτε ότι $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\sinh(x-y) = \sinh(x+(-y)) = \sinh x \cosh(-y) + \cosh x \sinh(-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

Άσκηση 2. Δείξτε ότι $\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$ και $\lim_{x \to +\infty} \tanh x = +1$.

Λύση.

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x \left(e^x - e^{-x}\right)}{e^x \left(e^x + e^{-x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} \left(e^x - e^{-x}\right)}{e^{-x} \left(e^x + e^{-x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Άσκηση 3. Δείξτε ότι $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$.

Λύση. Έστω $\theta = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$. Τότε $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\theta \geq 0$ και $\sin\theta = -\frac{3}{5}$. Οπότε $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = 4/5$.

Άσκηση 4. Βρείτε το $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Λύση. Έστω $y = \arccos(3/5)$. Τότε $y \in [0, \pi]$ και $\cos y = 3/5$. Άρα $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = 4/5$. Οπότε $\sin\left(\arccos(3/5)\right) = \sin y = 4/5$.

Άσκηση 5. Βρείτε το $\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Λύση. Έστω $y = \arcsin(12/13)$. Τότε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\sin y = 12/13$. Άρα $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = 5/13$. Οπότε

$$\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right) = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{12}{5}$$

Άσκηση 6. Δείξτε ότι αν $x \neq 0$ τότε

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{αν } x > 0$$

και

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{αν } x < 0$$

Λύση. Θα δείξουμε την περίπτωση όπου $x > 0$ (Η περίπτωση $x < 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα). Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

είναι σταθερή και ίση με $\pi/2$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

που σημαίνει ότι η $f(x), x > 0$ είναι σταθερή συνάρτηση. Επειδή

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $f(x) = f(1) = \pi/2$ δηλαδή $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 7. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x)$, της συνάρτησης $f(x) = e^x \cosh x$ τάξης $n = 2$ με κέντρο το $a = 0$.

Λύση. Έχουμε $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x \cosh x + e^x \sinh x = e^x(\cosh x + \sinh x) = e^x \cdot e^x = e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 2$. Άρα

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 + x + x^2.$$

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$,

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \arccos x + \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$. Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$F'(x) = (\arccos x + \arcsin x)' = (\arccos x)' + (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Από γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής έπεται ότι η F είναι σταθερή. Επειδή

$$F(0) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $F(x) = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άρα, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άσκηση 9. (α) Βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \cosh x$ τάξης $n = 4$ με κέντρο το $a = 0$.

(β) Βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \sinh x$ τάξης $n = 5$ με κέντρο το $a = 0$.

Λύση. Έχουμε $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και άρα $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$, $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, $f^{(3)}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$ και $f^{(4)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$. Συνεπώς, $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 1$, και $f'(0) = f^{(3)}(0) = 0$. Άρα

$$T_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Γενικά, για καθε $n \geq 0$, $T_{2n} = T_{2n+1}$ και

$$T_{2n}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(β) Ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$T_5(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Γενικά για κάθε $n \geq 0$, $T_{2n+1} = T_{2n+2}$ και

$$T_{2n+1}(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Άσκηση 10. (α) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_6(x)$ τάξης $n = 6$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(β) Αντικαθιστώντας στο $T_6(x)$ το x με το x^2 βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 12$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(γ) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 13$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης $\arcsin x$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2},\ f''(x) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}(1-x)^{-5/2},\ f^{(3)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-7/2}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-9/2},\ f^{(5)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-11/2}\ f^{(6)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}(1-x)^{-13/2}$$

Συνεπώς,

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{2},\ f''(0) = \frac{1\cdot 3}{2^2},\ f^{(3)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4},\ f^{(5)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^5},\ f^{(6)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^6}$$

Οπότε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 6$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ δίνεται από τον τύπο

$$T_6(x) = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^5\cdot 5!}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^6\cdot 6!}x^6$$

Επειδή

$$2^n\cdot n! = (2\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n) = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)$$

έχουμε τελικά

$$T_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}x^6$$

(β) Αντικαθιστούμε το x με το x^2 και παίρνουμε το πολυώνυμο

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^{10} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}x^{12}$$

(γ) Επειδή $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ η παράγωγος του πολυωνύμου Taylor τάξης n της συνάρτησης $g(x) = \arcsin x$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης $n-1$ της συνάρτησης $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (δείτε και σχετική άσκηση στο Φυλλάδιο 1). Άρα, από το (β), το πολυώνυμο που ζητάμε είναι το

$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\frac{x^{11}}{11} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\frac{x^{13}}{13}$$

Άσκηση 11. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x τέτοιο ώστε
$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\sinh \xi}{6} x^3$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$ με $x \neq 0$ ισχύει ότι $\left|\cosh x - \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)\right| < |x|^3$.

(γ) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$.

Λύση. (α) Έστω $f(x) = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$. Σταθεροποιούμε ένα $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$. Από τον Τύπο Taylor υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x τέτοιο ώστε

$$\cosh x = T_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3$$

όπου

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2$$

είναι το πολυώνυμο Taylor της f τάξης $n = 2$ με κέντρο το $x_0 = 0$. Επειδή $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $f^{(3)}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ έχουμε $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$ και $f^{(3)}(x) = \sinh x$.

Άρα $T_2(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$ και

$$\cosh x = T_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\sinh \xi}{6} x^3 \tag{2}$$

(β) Έστω $x \in [-1, 1]$ με $x \neq 0$. Από το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x (και άρα $\xi \in (-1, 1)$) τέτοιο ώστε

$$\left|\cosh x - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right| = \frac{|\sinh \xi|}{6} |x|^3 \tag{3}$$

Επειδή η συνάρτηση $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα και περιττή ($\sinh(-x) = \sinh x$) έχουμε

$$|\sinh \xi| < \sinh 1$$

και άρα από την (3),

$$\left|\cosh x - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right| < \frac{\sinh 1}{6} |x|^3 < |x|^3$$

(αφού $\sinh 1 = \dfrac{e - e^{-1}}{2} < \dfrac{e}{2} < 2$)

(γ) Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0$$

Ισοδύναμα,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Σημείωση: Ένας δεύτερος τρόπος να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x-1}{x^2}$ είναι με χρήση του κανόνα De l' Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{x^2}&\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)'}{(x^2)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{2x}\\&\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$