ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

Άσκηση 1. Δείξτε ότι $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι $\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$ και $\lim_{x \to +\infty} \tanh x = +1$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$.

Άσκηση 4. Βρείτε το $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Άσκηση 5. Βρείτε το $\tan\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε το $\sin(\arctan 1)$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι αν $x > 0$ τότε $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Ομοίως δείξτε ότι αν $x < 0$, τότε $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Άσκηση 9. (α) Βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \cosh x$ τάξης $n = 4$ με κέντρο το $a = 0$.

(β) Βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης $f(x) = \sinh x$ τάξης $n = 5$ με κέντρο το $a = 0$.

Άσκηση 10. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x)$, της συνάρτησης $f(x) = e^x \cosh x$ τάξης $n = 2$ με κέντρο το $a = 0$.

Άσκηση 11. (α) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_6(x)$ τάξης $n = 6$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(β) Αντικαθιστώντας στο $T_6(x)$ το x με το x^2 βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 12$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(γ) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 13$ με κέντρο το $a = 0$ της συνάρτησης $\arcsin x$.

Άσκηση 12. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x τέτοιο ώστε

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\sinh \xi}{6} x^3$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$ με $x \neq 0$ ισχύει ότι $\left|\cosh x - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right| < |x|^3$.

(γ) Υπολογίστε το $\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$.