ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΣΕΜΦΕ, Μαθηματική Ανάλυση Ι, 2025

Άσκηση 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν η (a_n^2) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.
2. Αν $a_n^2 \to 0$ τότε $a_n \to 0$.
3. Αν $\lim_n a_n = 1$ τότε $\lim_n a_n^n = 1$.
4. Αν $0 < a_n < 1$ τότε $a_n^n \to 0$.
5. Αν $1 \leq a_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.
6. Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν συγκλίνει.

Λύση.

1. ΛΑΘΟΣ, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $a_n^2 = 1 \to 1$ αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει.
2. ΣΩΣΤΟ, $a_n^2 \to 0 \Rightarrow \sqrt{a_n^2} \to 0 \Rightarrow |a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$.
3. ΛΑΘΟΣ, $a_n = \sqrt[n]{2} \to 1$ ενώ $a_n^n = 2 \to 2$.
4. ΛΑΘΟΣ, $a_n = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$.
5. ΣΩΣΤΟ, από Θεώρημα ισοσυγκλινουσών και επειδή $\sqrt[n]{n} \to 1$.
6. ΣΩΣΤΟ, $a_n = (-1)^n$.

Άσκηση 2. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

(α) $\dfrac{na + (-1)^n}{n}$

(β) $\dfrac{\sin n}{n}$

(γ) $\dfrac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^3}{7 - \frac{1}{n}}$

(δ) $\dfrac{3 + (0.5)^n}{5 + 3(0.9)^n}$

(ε) $a_n = \dfrac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3}$

(ζ) $\lim_n \dfrac{n!}{n^n}$.

Λύση. (α) Έχουμε $a_n = \dfrac{na + (-1)^n}{n} = a + \dfrac{(-1)^n}{n} = a + (-1)^n \dfrac{1}{n} \to a + 0 = a$.
(Η ακολουθία $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ ως γινόμενο φραγμένης επί μηδενική).

(β) $|\sin n| \leq 1$ και $\frac{1}{n} \to 0$. Άρα $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$ ως φραγμένη επί μηδενική.

(γ) $\dfrac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3}{7-\frac{1}{n}} \to \dfrac{(2-0)^3}{7-0} = \dfrac{2^3}{7}$

(δ) $\dfrac{3+(0.5)^n}{5+3(0.9)^n} \to \dfrac{3+0}{5+3\cdot 0} = \dfrac{3}{5}.$

(ε) $\dfrac{4n^2-n+2}{n^2+7n-3} = \dfrac{n^2(4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(1+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2})} = \dfrac{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{7}{n}-\frac{3}{n^2}} \to \dfrac{4}{1} = 4$

(ζ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2 \ldots (n-1)\cdot n}{n\cdot n \ldots n \cdot n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}\cdot 1\cdot 1 \ldots 1$$

δηλαδή $0 \leq \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\lim\limits_n \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Άσκηση 3. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

οπότε

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

και άρα από το Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, έπεται ότι $a_n \to 0$.

Άσκηση 4. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, όπου $0 \leq a \leq b \leq c$.

Λύση. Επειδή $0 \leq a \leq b \leq c$, έχουμε ότι

$$c \leq \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \leq \sqrt[n]{3}c$$

Επιπλέον, $\sqrt[n]{3} \to 1$ και άρα από το Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, έπεται ότι $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \to c$.

Άσκηση 5. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $\sqrt[n]{n^2+n+1}$.

Λύση. Ισχύει ότι $1 \leq n^2+n+1 \leq n^2+n^2+n^2$ και άρα

$$1 \leq \sqrt[n]{n^2+n+1} \leq \sqrt[n]{3n^2}. \tag{1}$$

Επειδή

$$\sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1\cdot 1^2 = 1, \tag{2}$$

από την (1) και το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι

$$\sqrt[n]{n^2+n+1} \to 1.$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n^3]{1^{n^2}+2^{n^2}+\cdots+n^{n^2}}$.

Λύση. Έχουμε
$$1 \leq \sqrt[n^3]{1^{n^2} + 2^{n^2} + \cdots + n^{n^2}} \leq \sqrt[n^3]{n \cdot n^{n^2}}$$
Επειδή
$$\sqrt[n^3]{n \cdot n^{n^2}} = \sqrt[n^3]{n^{n^2+1}} = n^{\frac{n^2+1}{n^3}} \leq n^{\frac{2n^2}{n^3}} = n^{\frac{2}{n}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2$$
και $\lim_n \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \left(\lim_n \sqrt[n]{n}\right)^2 = 1$ από Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών,
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^3]{1^{n^2} + 2^{n^2} + \cdots + n^{n^2}} = 1$$

Άσκηση 7. Έστω $x_n \to x$ και έστω $a < b$ με $x \in (a,b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $x_n \in (a,b)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Λύση. Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε
$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq (a,b) \tag{3}$$
Για να προσδιορίσουμε με ακρίβεια ένα τέτοιο ϵ μπορούμε να πάρουμε τις αποστάσεις του x από τα a, b, $|x-a|$ και $|x-b|$ και να επιλέξουμε $\epsilon > 0$ μικρότερο από αυτές π.χ. $\epsilon = \frac{1}{2}\min(|x-a|, |x-b|)$. Τώρα για το ϵ που επιλέξαμε βρίσκουμε ένα n_0 τέτοιο ώστε
$$|x_n - x| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \tag{4}$$
για κάθε $n \geq n_0$. Από την (3) έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ $x_n \in (a,b)$.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών (αντίστοιχα αρρήτων).

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έστω η ακολουθία $\left(x - \frac{1}{n}\right)$. Έχουμε
$$x - 1 < x - \frac{1}{2} < x - \frac{1}{3} < \cdots < x - \frac{1}{n} < x - \frac{1}{n+1} < \cdots < x$$
Από πυκνότητα ρητών (αντ. αρρήτων), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in \mathbb{Q}$ (αντίστοιχα x_n άρρητο) τέτοιο ώστε
$$x - \frac{1}{n} < x_n < x - \frac{1}{n+1} \tag{5}$$
Η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών και από την (5) και το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών συγκλίνει στο x.

Άσκηση 9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι το A περιέχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ που τείνει στο $+\infty$. (Υπενθυμίζουμε ότι $a_n \to +\infty$ αν $\forall M > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$, για όλα τα $n \geq n_0$).

Λύση. Η ακολουθία (a_n) κατασκευάζεται αναδρομικά έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι (α) $a_n < a_{n+1}$ και (β) $a_n > n$. Η πρώτη συνθήκη εξασφαλίζει ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και η δεύτερη ότι $a_n \to +\infty$. Πράγματι για $n = 1$ επιλέγουμε $a_1 \in A$ με $a_1 > 1$. Αυτό μπορεί να γίνει επειδή το 1 δεν είναι άνω φράγμα του A. Έστω ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει $a_1, \ldots, a_k \in A$ με $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ και $a_1 > 1$, ..., $a_k > k$. Θέτουμε $M = \max\{a_k, k+1\}$ και επιλέγουμε $a_{k+1} \in A$ με $a_{k+1} > M$. Τότε $a_{k+1} > a_k$ και $a_{k+1} > k+1$. Με αυτόν τον επαγωγικό τρόπο κατασκευάζεται μια γνησίως αύξουσα ακολουθία (a_n) στο A με την ιδιότητα $a_n > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ιδιότητα αυτή της (a_n) επιβάλει ότι $a_n \to +\infty$. Πράγματι, έστω $M > 0$. Επιλέγουμε (Αρχιμήδεια Ιδιότητα) $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > M$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n \geq n \geq n_0 > M$.

Άσκηση 10. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $a_n \to a$.

(β) Για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $N_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \epsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Λύση. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι αν $|a_n - a| \geq \epsilon$ τότε υποχρεωτικά $n < n_0$ δηλαδή $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \epsilon\} \subseteq \{1, \ldots, n_0\}$ και άρα το N_ϵ είναι πεπερασμένο.

(β) $\Rightarrow$ (α): Έστω $\epsilon > 0$ και $n_0 = \max N_\epsilon + 1$ (αν $N_\epsilon = \emptyset$ θέτουμε $n_0 = 1$). Παρατηρούμε ότι

$$n \geq n_0 \Rightarrow n \notin N_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

Άσκηση 11. Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ που διαφέρουν σε πεπερασμένο πλήθος όρων. Αν $a_n \to a$ δείξτε ότι $b_n \to a$.

Λύση. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $a_n \to a$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_1$, ισχύει ότι $|a_n - a| < \epsilon$. Επίσης επεπειδή η (b_n) διαφέρει από την (a_n) σε πεπερασμένο πλήθος όρων υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $b_n = a_n$ για κάθε $n \geq n_2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε

$$n \geq n_0 \Rightarrow b_n = a_n \text{ και } n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - a| = |a_n - a| < \epsilon$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$, $|a_n - a| < \epsilon$ και συνεπώς $a_n \to a$.

Άσκηση 12. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $a_n \to a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n = a$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Λύση. Έστω ότι $a_n \to a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Τότε για $\epsilon = 1/2$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|a_n - a| < 1/2$ και άρα

$$|a_{n_0} - a_n| = |a_{n_0} - a + a - a_n| \leq |a_{n_0} - a| + |a - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Συνεπώς κάθε όρος a_n με $n > n_0$ απέχει από τον ο a_{n_0} απόσταση γνήσια μικρότερη του 1. Επειδή $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αυτό σημαίνει ότι $a_n = a_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$ (δηλαδή η (a_n) είναι τελικά σταθερή). Θέτουμε $a' = a_{n_0}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, $|a_n - a'| = 0 < \epsilon$ για όλα τα $n \geqslant n_0$ και άρα $a_n \to a'$. Από την μοναδικότητα του ορίου $a = a'$. Άρα $a_n = a$ για όλα τα $n \geqslant n_0$.

Άσκηση 13. Έστω (a_n) ακολουθία.

(α) Δείξτε ότι $a_n \to a \Leftrightarrow a_n - a \to 0$.

(β) Δείξτε ότι $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$. Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή αν $a \neq 0$?

Λύση. (α) Θέτουμε $d_n = a_n - a$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου έχουμε

$$\begin{aligned} a_n \to a &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ |d_n| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \ \forall n \geq n_0 \ \ |d_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow d_n \to 0 \end{aligned}$$

(β) Από την ανισότητα $||x| - |y|| \leq |x - y|$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_n \to a &\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 \ \ |a_n - a| < \epsilon \\ &\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0 \ \ ||a_n| - |a|| < \epsilon \\ &\Rightarrow |a_n| \to |a| \end{aligned}$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει, πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $|a_n| = 1 \to 1$ αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει.

Άσκηση 14. Έστω $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $a_n \to a > 0$. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$.

Λύση. Για $\epsilon = a/2$ επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κα'θε $n \geq n_0$ να έχουμε

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} < a_n < \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$$

Αλλά τότε για $a_1 = a/2$ και $a_2 = 3a/2$, έχουμε

$$\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_2}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $\sqrt[n]{a_1} \to 1$ και $\sqrt[n]{a_2} \to 1$ από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών έπεται ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

Άσκηση 15. (α) Αν $a_n \to a < 1$ δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (a, 1)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n < \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$.

(β) Αν $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sqrt[n]{b_n} \to b < 1$ δείξτε ότι $b_n \to 0$.

(γ) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{n^5}{2^n}$.

(δ) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (b_n) με $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $b_n \to 0$ αλλά $\sqrt[n]{b_n} \to 1$.

Λύση. (α) Έστω $\lambda \in (a, 1)$. Τότε $\lambda = a + \epsilon$ με $\epsilon = \lambda - a$. Αφού $a_n \to a$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a_n - a < \epsilon \Rightarrow a_n < a + \epsilon = \lambda$$

(β) Έστω $\lambda \in (b, 1)$ (π.χ. $\lambda = \dfrac{b+1}{2}$). Από το (α) (για $a_n = \sqrt[n]{b_n}$) έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sqrt[n]{b_n} < \lambda \Rightarrow b_n < \lambda^n$ για κα'θε $n \geq n_0$. Άρα

$$0 < b_n < \lambda^n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 < \lambda < 1$ έχουμε $\lambda^n \to 0$ και άρα από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $b_n \to 0$.

(γ) Έχουμε $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{(\sqrt[n]{n})^5}{2} \to \dfrac{1}{5} < 1 \Rightarrow \dfrac{n^5}{2^n} \to 0$.

(δ) Αν $b_n = \dfrac{1}{n}$ τότε $b_n \to 0$ αλλά $\sqrt[n]{b_n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

Άσκηση 16. Αποδείξτε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\dfrac{m^n}{n!} \to 0$.

Λύση. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n > m$ έχουμε ότι

$$\frac{m^n}{n!} = \frac{m^n}{m!(m+1)(m+2)\cdot \cdots \cdot n} \leq \frac{m^n}{m!(m+1)^{n-m}} = \frac{(m+1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^n$$

Άρα, θέτοντας

$$c = \frac{(m+1)^m}{m!} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{m}{m+1}$$

έχουμε

$$0 \leq \frac{m^n}{n!} \leq c \cdot \lambda^n$$

για κάθε $n \geq m$. Επειδή $0 < \lambda < 1$, έχουμε ότι $\lambda^n \to 0$ και άρα από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\dfrac{m^n}{n!} \to 0$.

Άσκηση 17. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό.

(α) Αν το A είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $a_n \to \sup A$.

(β) Αντίστοιχα αν το A είναι κάτω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $a_n \to \inf A$.

Λύση. (α) Έστω $s = \sup A$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $a_n \in A$ με $s - \dfrac{1}{n} < a_n \leq s$. Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο s.

(β) Ομοίως, έστω $\tau = \inf A$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $a_n \in A$ με $\tau \leq a_n < \tau + \dfrac{1}{n}$. Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο τ.

Άσκηση 18. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και έστω $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(α) Το M είναι το supremum του A.

(β) Υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to M$.

Λύση. $(a) \Rightarrow (b)$: Αν το $M = \sup A$ τότε από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, μπορούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να επιλέξουμε $a_n \in A$ με $M - \dfrac{1}{n} < a_n \leq M$. Η ακολουθία (a_n) που παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο είναι μια ακολουθία στο A με $a_n \to M$ από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

$(b) \Rightarrow (a)$: Έστω (a_n) ακολουθία στο A με $a_n \to M$. Υποθέτουμε επίσης ότι το M είναι άνω φράγμα του A. Αν το M δεν ήταν το $\sup A$ τότε $\sup A < M$ (θυμίζουμε ότι το $\sup A$ είναι εξ ορισμού το μικρότερο άνω φράγμα του A). Θέτουμε $\epsilon = M - \sup A$. Τότε $\epsilon > 0$ και άρα μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|a_n - M| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά τότε

$$|a_{n_0} - M| < \epsilon \Rightarrow M - \epsilon < a_{n_0} \Rightarrow \sup A < a_{n_0}$$

άτοπο, αφού $a_{n_0} \in A$.

Άσκηση 19. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει τότε η ακολουθία $b_n = a_{2n} - a_{2n-1}$ συγκλίνει στο 0.
2. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ και $a_{3n} = 1$ τότε $a = 1$.
3. Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < \dots$ τέτοια ώστε η ακολουθία $a_n = \cos k_n$ συγκλίνει.

Λύση.

1. ΣΩΣΤΟ, αν $a = \lim a_n$ τότε οι (a_{2n}) και (a_{2n-1}) συγκλίνουν στο a ως υπακολουθίες της (a_n) και άρα η διαφορά τους $a_{2n} - a_{2n-1}$ συγκλίνει στο $a - a = 0$.
2. ΣΩΣΤΟ, διότι η (a_{3n}) είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας (a_n) και άρα $1 = \lim a_{3n} = \lim a_n$.
3. ΣΩΣΤΟ, η ακολουθία $a_n = \cos n$ είναι φραγμένη ακολουθία και άρα από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $k_1 < k_2 < \dots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε η $a_{k_n} = \cos k_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 20. Αποδείξτε οτι δεν υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών που να είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση. Έστω ότι υπήρχε ακολουθία (k_n) στο $\mathbb{N}$ με $k_1 > k_2 > k_3 > \dots$. Το σύνολο των όρων της (k_n), $K = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ ως μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει minimum (αρχή της Καλής διάταξης του $\mathbb{N}$). Το $\min K$ είναι στοιχείο του K και άρα $\min K = k_{n_0}$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Όμως $k_{n_0+1} < k_{n_0}$ αφού η (k_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Αυτό σημαίνει ότι το K περιέχει στοιχείο που είναι γνήσια μικρότερο από το ελάχιστο στοιχείο του, πράγμα που είναι βέβαια αδύνατο να συμβαίνει.

Άσκηση 21. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία και έστω (a_{k_n}) μια υπακολουθία της.

(α) Δείξτε ότι η (a_{k_n}) και η (a_n) έχουν κοινά άνω φράγματα.

(β) Δείξτε ότι αν η (a_{k_n}) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει $\lim a_n = \lim a_{k_n}$.

Λύση. (α) Αν M άνω φράγμα της (a_n) τότε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα και $a_{k_n} \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα κάθε άνω φράγμα της (a_n) είναι και άνω φράγμα της (a_{k_n}). Αντίστροφα, έστω $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα της (a_{k_n}) και έστω $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $k_n \geq n$ και η (a_n) είναι αύξουσα έχουμε $a_n \leq a_{k_n} \leq M$ και άρα $a_n \leq M$. Συνεπώς κάθε άνω φράγμα της (a_{k_n}) είναι άνω φράγμα της (a_n).

(β) Αφού η (a_{k_n}) είναι συγκλίνουσα θα είναι και άνω φραγμένη. Από το (α) έχουμε ότι η (a_n) και η (a_{k_n}) έχουν κοινό σύνολο άνω φραγμάτων. Ειδικότερα το μικρότερο άνω φράγμα θα είναι το ίδιο και για τις δύο ακολουθίες και άρα $\sup a_n = \sup a_{k_n}$. Επειδή είναι και οι δύο αύξουσες από το Θεώρημα σύγκλισης μονότονων και φραγμένων ακολουθιών έχουμε ότι $\lim a_n = \sup a_n = \sup a_{k_n} = \lim a_{k_n}$.

Άσκηση 22. Έστω $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (α) Δείξτε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και εξηγείστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα. (β) Βρείτε το $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ και δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

Λύση. (α) Είναι άμεσο ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα για να δείξουμε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα μπορούμε να εξετάσουμε τον λόγο $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διότι η ακολουθία $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα με πρώτο όρο το 2. Άρα η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και συνεπώς είναι συγκλίνουσα ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη.

(β) Έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e}$$

Έστω $a = \lim_n a_n$. Επειδή η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n) έπεται ότι $\lim a_{n+1} = \lim a_n = a$. Αν $a \neq 0$ θα έπρεπε

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_n a_{n+1}}{\lim_n a_n} = \frac{a}{a} = 1$$

άτοπο. Άρα $a = 0$.

Άσκηση 23. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

$$\text{(α)} \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{(β)} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \quad \text{(γ)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad \text{(δ)} \left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{2n^2}$$

Λύση. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n &= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)^n \\ &= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι $1 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ και άρα

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < e$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας n-οστές ρίζες έχουμε

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} < \sqrt[n]{e}$$

Επειδή $\sqrt[n]{a} \to 1$ για κάθε $a > 0$, από το Θεώρημα των Ισοσυγκλινουσών έπεται ότι $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n} \to 1$.

(γ) Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2\frac{1}{n} = 1+n$$

και άρα $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$.

(δ) Από τον Ορισμό του αριθμού e έχουμε $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ και άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)^{3n^2} = e$ (ως όριο υπακολουθίας). Οπότε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)^{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$.

Άσκηση 24. Έστω $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3+a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι θετική, μονότονη και φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

Λύση. Με επαγωγή βλέπουμε ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3+a_n} < \dfrac{a_n}{3} < a_n$ και άρα η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη από το μηδέν, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης είναι συγκλίνουσα. Έστω $a = \lim_n a_n$ το όριό της. Τότε $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3+a_n} \Rightarrow a = \dfrac{a}{3+a} \Rightarrow a^2 + 3a = a \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a+2) = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $a = -2$. Επειδή $a_n > 0 \Rightarrow a \geq 0$ οπότε $a = 0$.

Άσκηση 25. Έστω $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (α) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$0 < a_{n+1} < a_n < 3 \tag{6}$$

(β) Εξηγείστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

Λύση. (α) Θα αποδείξουμε την (6) με επαγωγή. Για $n = 1$ είναι άμεσο: $a_1 = 2 \Rightarrow a_2 = \dfrac{1}{3-2} = 1$ και άρα $0 < a_2 < a_1 < 3$. Έστω ότι η (6) ισχύει για κάποιο $n = k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$0 < a_{k+1} < a_k < 3$$

Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για το $n = k+1$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$, με $x < 3$ είναι γνησίως αύξουσα και θετική. Άρα,

$$0 < a_{k+1} < a_k < 3 \Rightarrow 0 < f(a_{k+1}) < f(a_k) \Rightarrow 0 < a_{k+2} < a_{k+1}$$

Επειδή $a_{k+1} < 3$ έχουμε $0 < a_{k+2} < a_{k+1} < 3$ και η απόδειξη του επαγωγικού βήματος ολοκληρώθηκε. Από Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής η (6) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

(β) Από το (i) η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0. Άρα είναι συγκλίνουσα ως μονότονη και φραγμένη. Έστω $x = \lim_n a_n$. Τότε και $a_{n+1} \to x$. Άρα

$$a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n} \Rightarrow a_{n+1}(3-a_n) - 1 = 0 \Rightarrow 3a_{n+1} - a_n a_{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα έχουμε $a_n \leq a_1 = 2 \Rightarrow \lim a_n \leq 2 \Rightarrow x \leq 2$. Άρα η περίπτωση $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 2$ απορρίπτεται. Άρα $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Άσκηση 26. Έστω $a > 0$. Επιλέγουμε $a_1 > \sqrt{a}$ και έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \tag{7}$$

Δείξτε τα εξής: (α) $a_n \geq \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (β) $\dfrac{a}{a_n} \leq a_{n+1} \leq a_n$ (γ) $a_n \to \sqrt{a}$.

Λύση. (α) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $n = 1$ η ανισότητα ισχύει αφού από υπόθεση $a_1 > \sqrt{a}$. Έστω ότι $a_k \geq \sqrt{a}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Από την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου,

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + \frac{a}{a_k}) \geq \sqrt{a_k \cdot \frac{a}{a_k}} = \sqrt{a}$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$a_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow a_n^2 \geq a \Rightarrow a_n \geq \frac{a}{a_n}$$

και άρα επειδή ο a_{n+1} είναι ο μέσος όρος των a_n και $\dfrac{a}{a_n}$ θα πρέπει

$$\frac{a}{a_n} \leq a_{n+1} \leq a_n$$

(γ) Από το (β) έχουμε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα και από το (α) ότι είναι κάτω φραγμένη. Άρα η (a_n) είναι συγκλίνουσα με $x = \lim_n a_n \geq \sqrt{a} > 0$. Επιπλέον, $\lim a_{n+1} = x$. Άρα

$$x = \lim_n a_{n+1} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \Rightarrow 2x = x + \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = a$$

Επειδή όπως είδαμε $x > 0$ έχουμε ότι $x = \sqrt{a}$.

Άσκηση 27. Έστω $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ για κάθε $n \geq 1$.

(α) (*1 μον.*) Δείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.

(β) (*1 μον.*) Υπολογίστε το όριό της.

Λύση. (α) Η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Πράγματι $x_2 = \sqrt{2 + x_1} > \sqrt{2} = x_1$. Έστω $x_{k+1} > x_k > 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε

$$x_{k+2} = \sqrt{2 + x_{k+1}} > \sqrt{2 + x_k} = x_{k+1}$$

Με Επαγωγή έχουμε ότι $x_{n+1} > x_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Επίσης με επαγωγή δείχνουμε ότι $x_n < 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι $x_k < 2$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$.

(β) Ως μονότονη και φραγμένη η (x_n) είναι συγκλίνουσα. Έστω $x = \lim x_n$. Τότε $x = \sqrt{2 + x} \Rightarrow x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Άρα $x = 2$ ή $x = -1$. Επειδή $x_n > 0$ έπεται $\lim x_n = x \geq 0$ και άρα $x = 2$.

Άσκηση 28. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών.

(α) Αν $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

(β) Αν $\lim_n \sqrt[n]{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

Λύση. (α) Επειδή $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Με άλλα λόγια η ακολουθία (a_n) είναι τελικά φθίνουσα. Επειδή είναι και κάτω φραγμένη από το 0 είναι συγκλίνουσα με $\lim_n a_n \geq 0$. Έστω $a = \lim_n a_n$. Επειδή η (a_{n+1}) είναι υπακολουθία της (a_n) έχουμε $a = \lim_n a_{n+1}$. Αν $a \neq 0$ τότε $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a}{a} = 1$ άτοπο. Άρα $a = 0$.

(β) Έστω $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$. Επιλέγουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $ell < \lambda < 1$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\sqrt[n]{a_n} < \lambda \Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq \lambda^n$ για όλα τα $n \geq n_0$. Από Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών $a_n \to 0$.

Άσκηση 29. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \tag{8}$$

(β) Αποδείξτε ότι $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

Λύση. Θα αποδείξουμε την (8) με Μαθηματική Επαγωγή. Για $n = 1$ η (8) λέει ότι $2 < e < 4$ που ισχύει. Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιο $n = k$, δηλαδή έστω ότι

$$\frac{(k+1)^k}{k!} < e^k < \frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \tag{9}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < e < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \tag{10}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από την (10) για $n = k + 1$ έχουμε

$$\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} < e < \frac{(k+2)^{k+2}}{(k+1)^{k+2}} \tag{11}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την (9) με την (11) παίρνουμε

$$\frac{(k+1)^k}{k!} \frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} < e^k \cdot e < \frac{(k+1)^{k+1}}{k!} \frac{(k+2)^{k+2}}{(k+1)^{k+2}}$$

Κάνοντας πράξεις παίρνουμε

$$\frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)!} < e^{k+1} < \frac{(k+2)^{k+2}}{(k+1)!}$$

που είναι η (8) για $n = k + 1$.

(β) Από την (8) παίρνοντας n-οστές ρίζες έχουμε,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} < e < \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \sqrt[n]{n+1}$$

και άρα

$$\frac{e}{\sqrt[n]{n+1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < e - \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \tag{12}$$

Επειδή

$$1 \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$$

και

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{n}$$

από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακλουθιών έχουμε ότι $\sqrt[n]{n+1} \to 1$ και $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$. Από την (12) και πάλι από το Θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών παίρνουμε ότι $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

Άσκηση 30. (α) Αν $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ δείξτε ότι $b_{n-1}^{-1} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο $\dfrac{1}{e}$.

(γ) Βρείτε το $\lim\limits_n \dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}$.

Λύση. (α) Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι $a_n = b_{n-1}^{-1}$.

(β) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{b_{n-2}}{b_{n-1}} > 1$ επειδή η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης $b_n \to e$ και άρα $\lim a_n = \dfrac{1}{\lim b_{n-1}} = \dfrac{1}{e}$.

(γ) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
1+2^2+\cdots+(n-2)^{n-2}+(n-1)^{n-1}+n^n &< (n-2)(n-2)^{n-2}+(n-1)^{n-1}+n^n \\
&= (n-2)^{n-1}+(n-1)^{n-1}+n^n \\
&< 2(n-1)^{n-1}+n^n \\
&< \left[2\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}+1\right]n^n \\
&= \left[2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n-1}+1\right]n^n \\
&< \left[\frac{2}{e(n-1)}+1\right]n^n
\end{aligned}$$

διότι από το (β) συμπεραίνουμε ότι $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n < \dfrac{1}{e}$. Άρα

$$1 \leq \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} \leq \frac{2}{e(n-1)}+1$$

για κάθε $n \geq 2$. Συνεπώς από Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών $\lim\limits_n \dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} = 1$.