

Εισαγωγή στα ΣΗΕ

Δημέας Άρης Διάλεξη #4

15/10/2025



Περιεχόμενα

- Βασικά μεγέθη του μαγνητικού πεδίου
- Εξισώσεις του Maxwell
- Μόνιμο Μαγνητικό Πεδίο
- Μαγνητικά Υλικά

Βασικά μεγέθη του μαγνητικού πεδίου

- Μαγνητική επαγωγή ή πυκνότητα μαγνητικής ροής
 - Σύμβολο: **B**
 - Μονάδα μέτρησης το Tesla (T)
- Μαγνητική ροή φ
 - Η μαγνητική ροή φ που διέρχεται από μία επιφάνεια S είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα της μαγνητικής επαγωγής: $\varphi = \int_S \mathbf{B} \mathbf{n} dS$ (3.1)
 - Μονάδα Μέτρησης το Weber (Wb) ($1T=1Wb/m^2$)
- Ένταση του μαγνητικού πεδίου
 - Σύμβολο **H**
 - Μονάδα μέτρησης Ampere ανά μέτρο (A/m)

Μαγνητική επαγωγή και ένταση μαγνητικού πεδίου

- Η μαγνητική επαγωγή συνδέεται με την ένταση του μαγνητικού πεδίου μέσω της μαγνητικής διαπερατότητας μ του υλικού στο οποίο εφαρμόζεται το μαγνητικό πεδίο:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.2)$$

- Σε ένα μη γραμμικό μαγνητικό υλικό, η μαγνητική διαπερατότητα εξαρτάται από το υλικό στο οποίο εφαρμόζεται το μαγνητικό πεδίο και από την ένταση του πεδίου

$$\mu = \mu(H) \quad (3.3)$$

- Τα γραμμικά μαγνητικά υλικά έχουν σταθερή μαγνητική διαπερατότητα ανεξάρτητα της έντασης του πεδίου.

Μαγνητικής επαγωγή και ένταση μαγνητικού πεδίου

- Η μαγνητική διαπερατότητα του κενού (γραμμική συμπεριφορά) είναι
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$
- Η μονάδα 1 Henry (H) είναι η μονάδα της αυτεπαγωγής και $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$
- Η μαγνητική διαπερατότητα των υλικών γράφεται ως πολλαπλάσιο αυτής του κενού

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

- Η αδιάστατη σταθερά μ_r ονομάζεται σχετική μαγνητική διαπερατότητα και χαρακτηρίζει ένα υλικό (πόσο εύκολα μαγνητίζεται)

Εξισώσεις του Maxwell

- Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο: $\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho$ (3.5)
- Νόμος του διατήρησης του ηλεκτρικού Φορτίου : $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (3.6)
- Νόμος του Ampere: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t}$ (3.7)
- Νόμος του Faraday: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (3.8)
- Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (3.9)

Οι εξισώσεις του Maxwell συνδέουν τα μεγέθη ($\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$) του μαγνητικού πεδίου με την ένταση $\mathbf{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου και την πυκνότητα $\mathbf{J}$ του ηλεκτρικού ρεύματος

Εξισώσεις του Maxwell

- E (σε V/m): ένταση του ηλεκτρικού πεδίου
- J (σε A/m): πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος
- ρ : πυκνότητα ελεύθερου ηλεκτρονίου
- ϵ : διηλεκτρική σταθερά του υλικού

Εξισώσεις του Maxwell

- Η αλληλεπίδραση του χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου H και του χρονικά μεταβαλλόμενου ηλεκτρικού πεδίου E προκαλεί την εμφάνιση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που μεταδίδονται με την ταχύτητα του φωτός
- Στις εφαρμογές του μαθήματος τα ηλεκτρικά και μαγνητικά μεγέθη μεταβάλλονται με πολύ βραδείς ρυθμούς σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός
- Οπότε θεωρούμε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταδίδονται πρακτικώς ακαριαία και ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν εμπλέκεται με το μαγνητικό πεδίο.

Μόνιμο Μαγνητικό Πεδίο

- Όταν θεωρήσουμε τις προηγούμενες παραδοχές, ο νόμος του Ampere απλοποιείται στην εξής μορφή:
- $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = I \quad (3.18)$
- Συνεπώς το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μίας κλειστής διαδρομής C ισούται με το ρεύμα I που διαρρέει την επιφάνεια S που ορίζει η C
- Για το λόγο αυτό και ο νόμος του Ampere ονομάζεται και νόμος του διαρρεύματος.

Μόνιμο Μαγνητικό Πεδίο

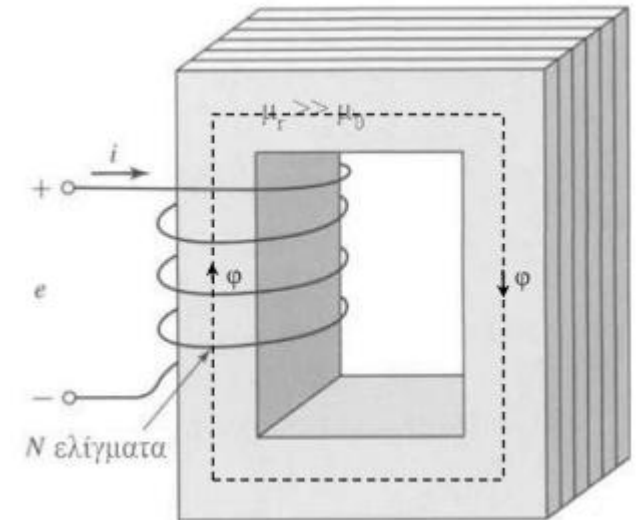
- Ο Νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο παίρνει την εξής μορφή:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

- Η μαγνητική ροή που εισέρχεται σε μία επιφάνεια είναι ίση με τη μαγνητική ροή που εξέρχεται από αυτήν

Μόνιμο Μαγνητικό Πεδίο

- Ο νόμος του Faraday $\mathcal{E} = \frac{d\lambda}{dt} = N \frac{d\phi}{dt}$ (3.23)
- Η ΗΕΔ $\mathcal{E}$ που επάγεται σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της πεπλεγμένης με το κύκλωμα μαγνητικής ροής
- $\lambda = N\phi$ είναι η πεπλεγμένη ροή με κύκλωμα N ελίσματων

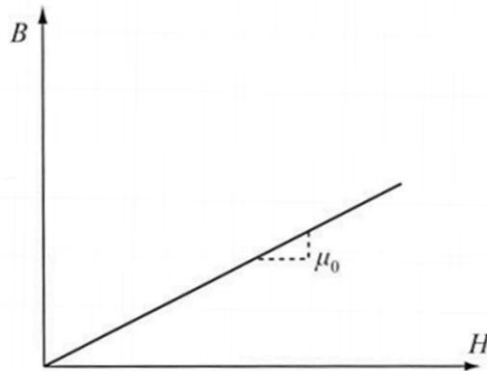


Μαγνητικά Υλικά

- Η μαγνητική συμπεριφορά κάθε υλικού χαρακτηρίζεται από το μέγεθος την σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας
- Υπάρχουν 2 βασικές κατηγορίες υλικών
 - Μη μαγνητικά ή διαμαγνητικά υλικά
 - Μαγνητικά ή σίδηρομαγνητικά υλικά, τα οποία με τη σειρά τους χωρίζονται σε μαλακά και σκληρά σίδηρομαγνητικά υλικά

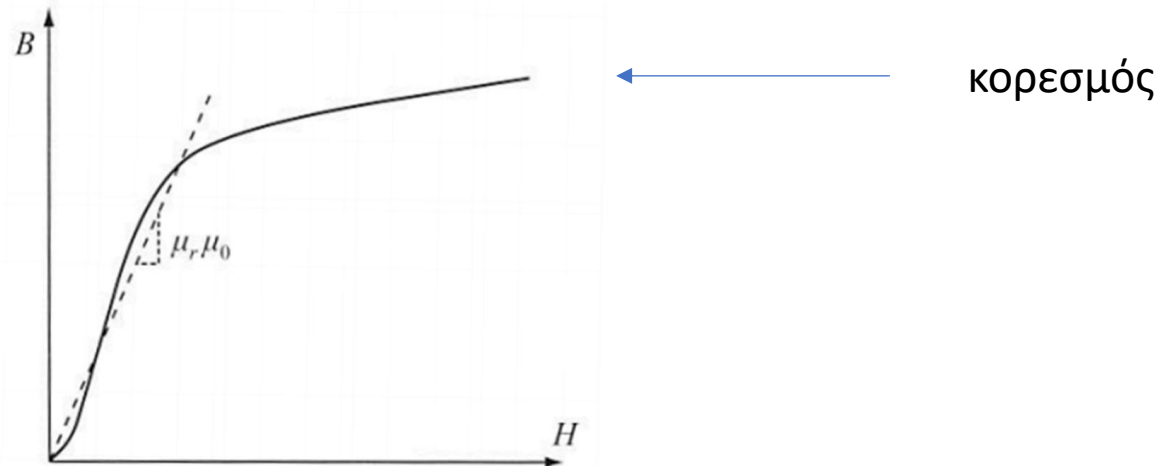
Μη Μαγνητικά Υλικά

- Παραδείγματα τέτοιων υλικών: αέρας, νερό, ξύλο και τα περισσότερα μέταλλα εκτός από τα κράματα που περιέχουν σίδηρο
- Παρουσιάζουν σταθερή μαγνητική διαπερατότητα και πολύ μικρή τιμή μαγνητικής επαγωγής για λογικές εντάσεις μαγνητικού πεδίου



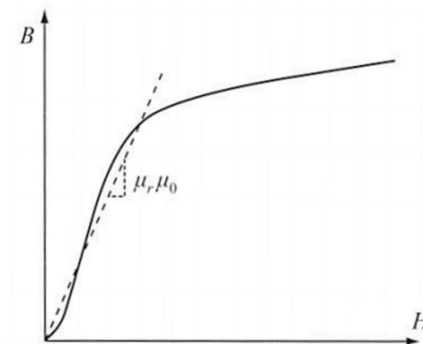
Σιδηρομαγνητικά Υλικά

- Έχουν πολύ μεγάλες τιμές μαγνητικής διαπερατότητας:
- $2000 < \mu_r < 80000$
- Η μαγνητική διαπερατότητα δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με την ένταση του μαγνητικού πεδίου H



Μαλακά Σιδηρομαγνητικά Υλικά

- Δεν έχουν μεγάλες τιμές παραμένοντος μαγνητισμού, δηλαδή όταν πάψουν να μαγνητίζονται ($H = 0$), χάνουν σε μεγάλο βαθμό τη μαγνητική τους ροή ($B \approx 0$)
- Η καμπύλη μαγνήτισης μπορεί να γραμμικοποιηθεί ικανοποιητικά, τουλάχιστον μέχρι κάποια τιμή της έντασης H του μαγνητικού πεδίου, οπότε στην περιοχή αυτή υποτίθεται ότι μ_r είναι περίπου σταθερή

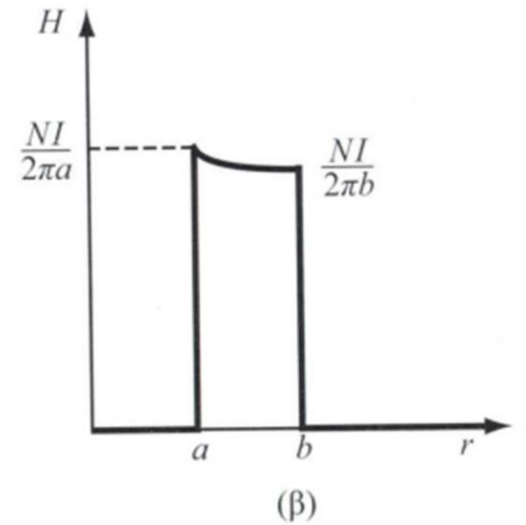
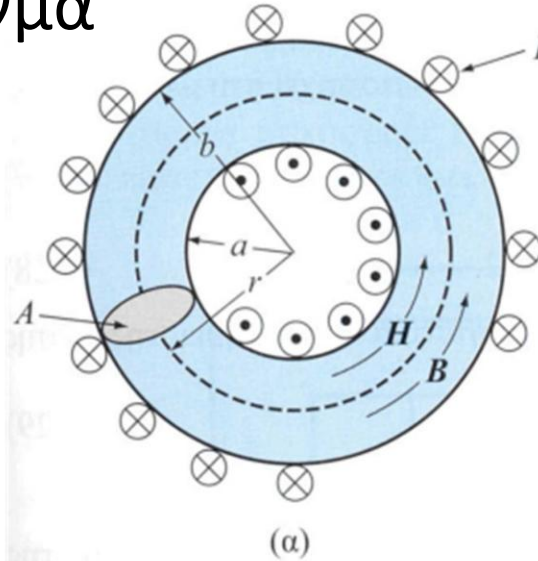


Σκληρά Σιδηρομαγνητικά Υλικά

- Τα σκληρά σιδηρομαγνητικά υλικά είναι οι μόνιμοι μαγνήτες
- Ο παραμένων μαγνητισμός έχει πολύ μεγάλη τιμή και η γραμμικοποίηση δεν είναι δυνατή
- Τα υλικά που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή ηλεκτρικών μηχανών και μετασχηματιστών ανήκουν κυρίως στην κατηγορία των μαλακών σιδηρομαγνητικών υλικών

Παράδειγμα: στοιχειώδες Μαγνητικό κύκλωμα

- Σιδηρομαγνητικό υλικό με σταθερή μαγνητική διαπερατότητα και διατομή A
- Ομοιόμορφο σπείρωμα N ελιγμάτων
- Συνεχές ρεύμα έντασης I στο τύλιγμα
- Εσωτερική ακτίνα δακτυλίου: a
- Εξωτερική ακτίνα δακτυλίου: b



Παράδειγμα: στοιχειώδες Μαγνητικό κύκλωμα

- Θεωρώντας ότι το τύλιγμα είναι εντελώς ομοιόμορφο και συνεχώς κατανεμημένο , τότε κατά μήκος οποιασδήποτε διαδρομής με σταθερή ακτίνα r η ένταση του μαγνητικού πεδίου θα παραμένει σταθερή
- Αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere
- $\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2\pi r H = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi r}$ (3.25)
- Το μέγεθος NI ονομάζεται μαγνητεργετική δύναμη (ΜΕΔ) και συμβολίζεται με F

$$F = NI = 2\pi r H \quad (3.26)$$

- Η ΜΕΔ έχει διάσταση ρεύματος αλλά για να διακρίνεται η φυσική της σημασία μετριέται συνήθως σε Αμπερελίγματα (Α-ε)
- Προφανώς στο εσωτερικό του δακτυλίου ($r < a$) καθώς και στο εξωτερικό του ($r > b$) η ένταση του μαγνητικού πεδίου θεωρούμε ότι είναι μηδέν.

Παράδειγμα: στοιχειώδες Μαγνητικό κύκλωμα

- Η μαγνητική επαγωγή συνδέεται με την ένταση του μαγνητικού πεδίου μέσω της μαγνητικής διαπερατότητας μ του υλικού στο οποίο εφαρμόζεται το μαγνητικό πεδίο:

$$B = \mu H \quad (3.2)$$

- Οπότε από την $H = \frac{NI}{2\pi r}$ (3.25) και την $F = NI = 2\pi r H$ (3.26) έχουμε
- $B = \frac{\mu F}{2\pi r}$
- Κάνοντας την υπόθεση ότι η διατομή είναι σχετικά μικρή μπορούμε να πούμε ότι η μέση τιμή της μαγνητικής επαγωγής είναι
- $B_\mu = \frac{\mu F}{2\pi r_\mu}$ (3.29), όπου $r_\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$

Παράδειγμα: στοιχειώδες Μαγνητικό κύκλωμα

- Θεωρώντας ότι το μέσο μήκος του μαγνητικού κυκλώματος είναι $l_\mu = 2\pi r_\mu$

- Μπορούμε να πούμε προσεγγιστικά ότι η μαγνητική ροή $\Phi \approx B_\mu A$ και χρησιμοποιώντας την $B_\mu = \frac{\mu F}{2\pi r_\mu}$ (3.29) έχουμε

$$\Phi \approx \frac{\mu F A}{2\pi r_\mu} \quad (3.32)$$

- Κατ'αναλογία με τα ηλεκτρικά κυκλώματα ορίζεται η μαγνητική αντίσταση R ενός μαγνητικού κυκλώματος ως:

$$R = \frac{F}{\Phi} = \frac{l_\mu}{\mu A} \quad (3.33)$$

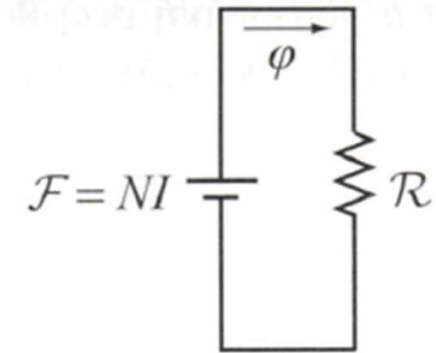
- Μετριέται σε Αμπεριλίγματα ανά Weber (A-ε/Wb)

Αναλογία Ηλεκτρικών και Μαγνητικών Κυκλωμάτων

	Ηλεκτρικό Κύκλωμα			Μαγνητικό κύκλωμα		
1	Ηλεκτρικό ρεύμα	I	A	Μαγνητική ροή	Φ	Wb
2	Πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	J	A/m	Πυκνότητα μαγνητικής ροής	B	T
3	Ένταση ηλεκτρικού πεδίου	E	V/m	Ένταση Μαγνητικού πεδίου	H	A-ε/M
4	Ηλεκτρεργετική δύναμη	V	V	Μαγνητεργετική δύναμη	F	A-ε
5	Ηλεκτρική αντίσταση	R	Ω	Μαγνητική Αντίσταση	R	A-ε/Wb

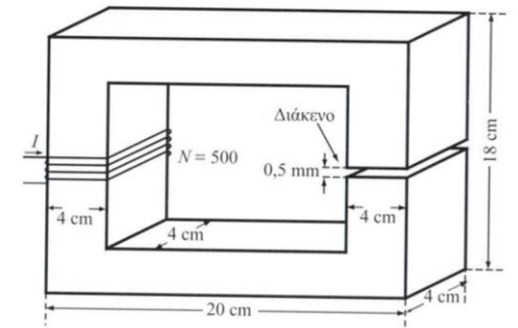
Παράδειγμα: στοιχειώδες Μαγνητικό κύκλωμα

- $R = \frac{\mathcal{F}}{\phi} = \frac{l_{\mu}}{\mu A} \Rightarrow \phi = \frac{\mathcal{F}}{R} = \frac{NI}{\frac{l_{\mu}}{\mu A}}$
- $\Rightarrow \phi = \frac{NI\mu A}{l_{\mu}}$



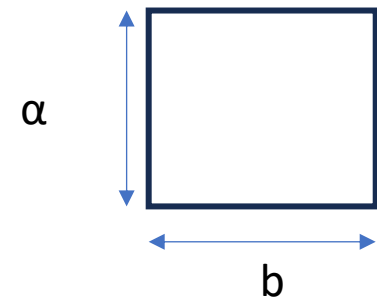
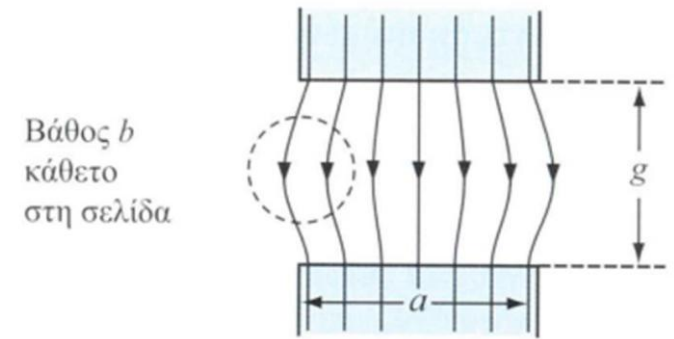
Διάκενο Αέρα

- Η μαγνητική αντίσταση του διακένου είναι
- $R_g = \frac{l_g}{\mu_g A} = \frac{l_g}{\mu_o A}$
- Η μαγνητική αντίσταση του πυρήνα σιδήρου είναι
- $R_\sigma = \frac{l_\sigma}{\mu_\sigma A} = \frac{l_\sigma}{\mu_o \mu_r A}$
- Προκύπτει ότι $R_g \gg R_\sigma$
- Αυτό σημαίνει ότι η μαγνητική αντίσταση του σιδήρου είναι αμελητέα



Θυσάνωση Μαγνητικού Πεδίου στο Διάκενο Αέρα

- Στο μαγνητικό υλικό, που έχει μικρότερη μαγνητική αντίσταση, η μαγνητική ροή παραμένει στο εσωτερικό
- Στο διάκενο, που έχει πολύ μεγαλύτερη μαγνητική αντίσταση, η μαγνητική ροή τείνει να καταλάβει μεγαλύτερο χώρο. Αυτό ονομάζεται θυσάνωση
- Για ορθογώνια διατομή του πυρήνα, η διατομή του διακένου διορθώνεται ως εξής:
- $A_g = (a + l_g)(b + l_g)$

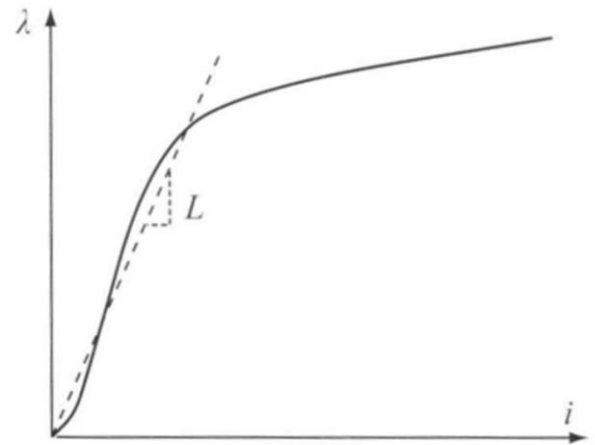


Αυτεπαγωγή και Αλληλεπαγωγή

- $\lambda = N\Phi$ είναι η πεπλεγμένη ροή με τύλιγμα N ελιγμάτων
- Η πεπλεγμένη ροή συνδέεται με την ένταση του ρεύματος i μέσω της αυτεπαγωγής L
- $\lambda = Li$ ή $L = \frac{\lambda}{i}$ και η μονάδα μέτρησης είναι το 1 Henry
- Η αυτεπαγωγή μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μεγεθών του μαγνητικού κυκλώματος ως ακολούθως:
- $$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N}{i} \frac{F}{R} = \frac{NNi}{iR} = \frac{N^2}{R} \quad (3.36)$$

Αυτεπαγωγή Σιδηρομαγνητικού Υλικού

- Η καμπύλη $\lambda-i$ ενός σιδηρομαγνητικού υλικού έχει ακριβώς την ίδια μορφή με την καμπύλη μαγνήτισης $B-H$ του υλικού, επειδή το λ είναι ανάλογο του B και το i είναι ανάλογο του H .
- Στα σιδηρομαγνητικά υλικά η αυτεπαγωγή δεν είναι σταθερή, όμως η κλίση της διακεκομμένης γραμμής στην καμπύλη $\lambda-i$ δίνει την κατά προσέγγιση σταθερή τιμή της αυτεπαγωγής L .



Αλληλεπαγωγή

- Σε ένα μαγνητικό κύκλωμα, η αλληλεπαγωγή (L_{12}) μεταξύ δύο τυλιγμάτων είναι ίση με τον λόγο της πεπλεγμένης ροής του πρώτου τυλίγματος (λ_1) προς το ρεύμα του δεύτερου τυλίγματος (i_2), όταν το ρεύμα του πρώτου τυλίγματος είναι ίσο με μηδέν ($i_1 = 0$):
- $$L_{12} = \left. \frac{\lambda_1}{i_2} \right|_{i_1 = 0} \quad (3.37)$$
- Όταν R είναι η μαγνητική αντίσταση που συνδεει τα 2 τυλίγματα τότε
- $$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1 N_2}{R} \quad (3.36)$$

Μαγνητικό Κύκλωμα με Δύο Διεγέρσεις

- Στην ειδική περίπτωση ενός γραμμικού μαγνητικού κυκλώματος με δύο ηλεκτρικές διεγέρσεις εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας:

$$\lambda_1 = L_{11} \cdot i_1 + L_{12} \cdot i_2$$

$$\lambda_2 = L_{21} \cdot i_1 + L_{22} \cdot i_2$$