

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

- (α) Αν $0 < \alpha < 1$ και (x_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|x_{n+1}| \leq \alpha|x_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $x_n \rightarrow 0$.
- (β) Αν $a_n \rightarrow 0$ τότε η $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα.
- (γ) Αν η (b_n) έχει θετικούς όρους και είναι γνησίως αύξουσα, τότε $b_n \rightarrow +\infty$.
- (δ) Αν η (γ_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\gamma_n \rightarrow +\infty$.
- (ε) Αν $y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $y_n \rightarrow 1$, τότε $y_n^n \rightarrow 1$.

Υπόδειξη: (α) Σωστό. Με επαγωγή δείχνουμε ότι $|x_n| \leq \alpha^{n-1}|x_1|$ για κάθε $n \geq 1$. Για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι

$$|x_{n+1}| \leq \alpha|x_n| \leq \alpha \cdot \alpha^{n-1}|x_1| = \alpha^n|x_1|.$$

Εφόσον $0 < \alpha < 1$, έχουμε ότι $\alpha^n \rightarrow 0$ (βασικό όριο). Συνεπώς,

$$0 \leq |x_n| \leq \alpha^{n-1}|x_1| = \frac{|x_1|}{\alpha} \cdot \alpha^n \rightarrow 0,$$

και από το κριτήριο παρεμβολής βλέπουμε ότι $|x_n| \rightarrow 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x_n \rightarrow 0$.

(β) Λάθος. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{1}{n}$ αν ο n είναι άρτιος και $a_n = \frac{1}{2^n}$ αν ο n είναι περιττός. Τότε, $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $a_n \rightarrow 0$ από το κριτήριο παρεμβολής. Όμως, η $(|a_n|)$ δεν είναι φθίνουσα αφού, για παράδειγμα, $a_5 = \frac{1}{10} < \frac{1}{6} = a_6$.

(γ) Λάθος. Η ακολουθία $b_n = 2 - \frac{1}{n}$ έχει θετικούς όρους, είναι γνησίως αύξουσα, και $b_n \rightarrow 2$.

(δ) Σωστό. Έστω $M > 0$. Αφού η (γ_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\gamma_{n_0} > M$. Αφού η (γ_n) είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$\gamma_n \geq \gamma_{n_0} > M.$$

Με βάση τον ορισμό, $\gamma_n \rightarrow +\infty$.

(ε) Λάθος. Για την ακολουθία $y_n = \sqrt[n]{n}$ έχουμε ότι $y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $y_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ (βασικό όριο). Όμως, $y_n^n = n \rightarrow +\infty$.

Ασκηση 2. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{n^3}{4^n}, \quad \beta_n = \frac{n^6}{6^n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$
$$\delta_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \epsilon_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}, \quad \zeta_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.$$

Υπόδειξη: (α) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)^3}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot 1^3 = \frac{1}{4} < 1,$$

άρα $\alpha_n \rightarrow 0$.

(β) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{(n+1)^6}{6^{n+1}} \frac{6^n}{n^6} = \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n} \right)^6 \rightarrow \frac{1}{6} \cdot 1^6 = \frac{1}{6} < 1,$$

άρα $\beta_n \rightarrow 0$.

(γ) Παρατηρούμε ότι ο μεγαλύτερος από τους όρους του αθροίσματος που ορίζει τον γ_n είναι ο $\frac{1}{(n+1)^2}$. Το άθροισμα έχει n όρους, άρα

$$0 < \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \leq n \cdot \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Εφόσον $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\gamma_n \rightarrow 0$.

(δ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας. Έχουμε $\sqrt[n]{\delta_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 1 - 1 = 0 < 1$, άρα $\delta_n \rightarrow 0$.

(ε) Παρατηρούμε ότι $n^2 \leq 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \leq n^2 + n^2 + \cdots + n^2 = n \cdot n^2 = n^3$, άρα

$$(\sqrt[n]{n})^2 = \sqrt[n]{n^2} \leq \epsilon_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} \leq \sqrt[n]{n^3} = (\sqrt[n]{n})^3.$$

Εφόσον $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, έχουμε ότι $(\sqrt[n]{n})^2 \rightarrow 1^2 = 1$ και $(\sqrt[n]{n})^3 \rightarrow 1^3 = 1$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\epsilon_n \rightarrow 1$.

(ζ) Έχουμε ότι $|\sin(n^3)| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$0 \leq |\zeta_n| = \frac{|\sin(n^3)|}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $|\zeta_n| \rightarrow 0$, άρα και $\zeta_n \rightarrow 0$. □

Άσκηση 3. Έστω $k \geq 2$ και $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}.$$

Υπόδειξη: Έχουμε ότι $a_k^n < a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n < a_k^n + a_k^n + \cdots + a_k^n = k \cdot a_k^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} < \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{k \cdot a_k^n} = a_k \sqrt[n]{k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\sqrt[n]{k} \rightarrow 1$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_k.$$

□

Άσκηση 4. Έστω $(a_n), (b_n)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

(β) Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αν δεν υποθέσουμε την (b_n) φραγμένη τότε δεν ισχύει απαραίτητα $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Υπόδειξη: (α) Γράφουμε $a_n - b_n = b_n \left(\frac{a_n}{b_n} - 1 \right)$. Από την υπόθεση, η (b_n) είναι φραγμένη και η $\left(\frac{a_n}{b_n} - 1 \right)$ είναι μηδενική. Συνεπώς, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

(β) Θεωρήστε τις $a_n = n + 1$ και $b_n = n$. □

Άσκηση 5. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$ για κάθε $n = 2, 3, \dots$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $b_n = a_{n+1} - a_n$ συγχλίνει. Μπορείτε να βρείτε το όριό της;

Υπόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία $b_n = a_{n+1} - a_n$. Από την υπόθεση, για κάθε $n \geq 1$ έχουμε ότι

$$2a_{n+1} \leq a_n + a_{n+2} \implies a_{n+1} - a_n \leq a_{n+2} - a_{n+1} \implies b_n \leq b_{n+1},$$

δηλαδή η (b_n) είναι αύξουσα. Επίσης, αφού η (a_n) είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \geq 1$, και τότε

$$|b_n| = |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1}| + |a_n| \leq 2M$$

για κάθε $n \geq 1$, δηλαδή η (b_n) είναι κι αυτή φραγμένη. Είδαμε ότι η (b_n) είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα η (b_n) συγχλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό b , από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών.

Έστω ότι $b > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $b_n > \frac{b}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Από τον ορισμό της (b_n) βλέπουμε ότι

$$a_{n_0+1} > a_{n_0} + \frac{b}{2} \implies a_{n_0+2} > a_{n_0+1} + \frac{b}{2} > a_{n_0} + 2\frac{b}{2}$$

και, επαγωγικά, $a_{n_0+k} > a_{n_0} + k\frac{b}{2}$, ή ισοδύναμα, για κάθε $n > n_0$ (θέτοντας $n = n_0 + k$) έχουμε ότι

$$a_n > a_{n_0} + \frac{b(n - n_0)}{2}.$$

Όμως, τότε $a_n \rightarrow +\infty$, το οποίο είναι άτοπο αφού η (a_n) είναι φραγμένη. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι αν $b_n \rightarrow b < 0$ τότε $a_n \rightarrow -\infty$ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο. Έπεται ότι, αναγκαστικά, $b_n \rightarrow 0$. □

Άσκηση 6. Έστω y θετικός πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας

$$a_n = \frac{[y] + [2y] + \dots + [ny]}{n^2}$$

όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x . Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow \frac{y}{2}$.

Υπόδειξη: Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους έχουμε

$$[y] \leq y < [y] + 1, \quad [2y] \leq 2y < [2y] + 1, \quad [ny] \leq ny < [ny] + 1.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$[y] + [2y] + \dots + [ny] \leq y + 2y + \dots + ny < [y] + [2y] + \dots + [ny] + n,$$

ή ισοδύναμα

$$y + 2y + \dots + ny - n < [y] + [2y] + \dots + [ny] \leq y + 2y + \dots + ny.$$

Έχουμε επίσης

$$y + 2y + \dots + ny = (1 + 2 + \dots + n)y = \frac{n(n+1)y}{2},$$

άρα

$$\frac{n(n+1)y}{2} - n < [y] + [2y] + \dots + [ny] \leq \frac{n(n+1)y}{2}.$$

Διαιρώντας με n^2 παίρνουμε

$$\frac{n+1}{2n}y - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[y] + [2y] + \dots + [ny]}{n^2} \leq \frac{n+1}{2n}y.$$

Όμως, $\frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n} y - \frac{1}{n} \right) = \frac{y}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} y.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $a_n \rightarrow \frac{y}{2}$. □

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. [Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.]

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \end{aligned}$$

άρα η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

αφού το άθροισμα που ορίζει τον y_n έχει n προσθετέους το πολύ ίσους με $\frac{1}{n+1}$. Συνεπώς, η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, η (y_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. □