

**ΣΗΜΜΥ**  
**Μαθηματική Ανάλυση**  
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

**Ασκηση 1.** Έστω  $a > 0$ . Θεωρούμε τυχόν  $x_1 > 0$  και για κάθε  $n \geq 1$  ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Αποδείξτε ότι η  $(x_n)$ , τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον  $\sqrt{a}$ . Βρείτε το  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Ασκηση 2.** Έστω  $0 < a_1 < b_1$ . Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η  $(a_n)$  είναι αύξουσα και η  $(b_n)$  φθίνουσα.

(β) Αποδείξτε ότι οι  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

**Ασκηση 3.** Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}, \quad b_n = \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n, \quad c_n = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

και

$$d_n = \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^n, \quad e_n = \left( 1 + \frac{2}{3n} \right)^n.$$

**Ασκηση 4.** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}.$$

**Ασκηση 5.** (α) Έστω  $(a_n)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία  $(b_n)$  θέτοντας  $b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ . Αποδείξτε ότι: αν  $a_n \rightarrow a$  τότε  $b_n \rightarrow a$ . Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Αποδείξτε ότι: αν  $a_n > 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $a_n \rightarrow a > 0$  τότε

$$\gamma_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \rightarrow a \quad \text{και} \quad \delta_n := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \rightarrow a.$$

**Ασκηση 6.** Έστω  $(a_n)$  ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$  τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ . Ισχύει το αντίστροφο;

[Υπόδειξη: Αν ορίσουμε  $b_1 = a_1$  και  $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$  για  $n \geq 2$ , τότε  $a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$ .]

**Ασκηση 7.** (α) Έστω  $(a_n)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι  $a_n \rightarrow a$  αν και μόνο αν οι υπακολουθίες  $(a_{2n})$  και  $(a_{2n-1})$  συγκλίνουν στο  $a$ .

(β) Έστω  $(a_n)$  μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες  $(a_{2n})$ ,  $(a_{2n-1})$  και  $(a_{3n})$  συγκλίνουν. Αποδείξτε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n}$ . Συμπεράνατε από αυτό ότι η  $(a_n)$  συγκλίνει.