Γραμμική Άλγεβρα

Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος
ppsarr@math.ntua.gr

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Πίνακες

Οι πίνακες αποτελούν μία θεμελιώδη έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας, όπως ακριβώς οι συναρτήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση, και παίζουν κρίσιμο ρόλο στη μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων. Θα ορίσουμε τους πίνακες και θα μελετήσουμε τις πράξεις πινάκων και τις ιδιότητες τους.

Παράδειγμα

Οι ποδοσφαιρικές ομάδες Α, Β, Γ και Δ συμμετείχαν σε ένα final four παίζοντας μεταξύ τους σε δύο γύρους. Οι βαθμοί που έλαβαν σημειώνονται στους πίνακες

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & \Gamma & \Delta \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \textit{και} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & \Gamma & \Delta \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

όπου κάθε αριθμός είναι οι βαθμοί που κέρδισε η ομάδα της γραμμής από την ομάδα της στήλης. Αν προσθέσουμε τους δύο πίνακες στοιχείο προς στοιχείο, τότε

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας περιέχει τους βαθμούς που κέρδισαν οι ομάδες συνολικά στους δύο γύρους. Αν προσθέσουμε όλες τις στήλες του, τότε λαμβάνουμε τη στήλη

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

με τους συνολικούς βαθμούς που κέρδισε κάθε ομάδα, ενώ αν προσθέσουμε όλες τις γραμμές του, τότε λαμβάνουμε τη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

με τους συνολικούς βαθμούς που "πρόσφερε" κάθε ομάδα στους αντιπάλους της.

Παράδειγμα

Επιλύουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα με τη (γνωστή από το σχολείο) μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 2y - z = 3 \\ x - 5y + 2z = -3 \end{cases}$$

(πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με 2 και αφαιρούμε το αποτέλεσμα από τη 2η)

(αφαιρούμε την 1η εξίσωση από την 3η)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 4y - 3z = -1 \\ -4y + z = -5 \end{cases}$$

(προσθέτουμε τη 2η εξίσωση στην 3η)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 4y - 3z = -1 \\ -2z = -6 \end{cases} \quad (*)$$

Το γραμμικό σύστημα $(*)$ είναι ισοδύναμο με το αρχικό (δηλαδή, έχει την ίδια ακριβώς λύση με αυτό) κι επιλύεται εύκολα ξεκινώντας από την 3η εξίσωση:

$$2z = 6 \Leftrightarrow z = 3,\ 4y - 9 = -1 \Leftrightarrow y = 2,\ x - 2 + 3 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Η εφαρμογή της μεθόδου βασίζεται στους συντελεστές των αγνώστων και στο μηδενισμό κάποιων από αυτούς. Αν σχηματίσουμε έναν πίνακα με 3 γραμμές και 4 στήλες όπου οι πρώτες 3 στήλες περιέχουν τους συντελεστές των x, y και z και η τέταρτη στήλη περιέχει τους σταθερούς όρους, τότε η διαδικασία "τριγωνοποίησης" γράφεται:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{(πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με 2} \\ \text{και αφαιρούμε το αποτέλεσμα από τη 2η)} \\ \text{(αφαιρούμε την 1η γραμμή από την 3η)} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \end{array}\right] \quad \text{(προσθέτουμε τη 2η γραμμή στην 3η)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right].$$

Ο τελευταίος πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα $(*)$.

Μία ορθογώνια διάταξη $\mu \cdot \nu$ αριθμών σε μ γραμμές και ν στήλες, εντός αγκυλών, ονομάζεται $\mu \times \nu$ **πίνακας**. Οι πίνακες συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, A, B, ... Οι αριθμοί που περιέχει ένας πίνακας A καλούνται **στοιχεία** του πίνακα και συμβολίζονται με πεζά γράμματα συνοδευόμενα από δύο δείκτες, $a_{i,j}$, όπου ο πρώτος δείκτης i δηλώνει τη γραμμή του στοιχείου και ο δεύτερος δείκτης j δηλώνει τη στήλη του. Δηλαδή,

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{1,2}} & & j\text{-στήλη} & & \phantom{a_{1,\nu}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \cdots & a_{\mu,j} & \cdots & a_{\mu,\nu} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-γραμμή} \\ \\ \\ \end{array}$$

ή συντομογραφικά, $A = [a_{i,j}]$.

Αν θεωρήσουμε τον 3×4 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε το $(1,2)$-στοιχείο του είναι $a_{1,2} = 2$, το $(2,4)$-στοιχείο του είναι $a_{2,4} = -2$ και το $(3,3)$-στοιχείο του είναι $a_{3,3} = -1$.

Δύο $\mu \times \nu$ πίνακες A και B ονομάζονται **ίσοι** αν έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα μεταξύ τους, ένα προς ένα. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε $A = B$ και πρακτικά, οι δύο πίνακες ταυτίζονται.

• Ένας πίνακας που τα στοιχεία του είναι πραγματικοί (ή μιγαδικοί) αριθμοί ονομάζεται **πραγματικός** (αντίστοιχα, **μιγαδικός**) **πίνακας**.

• Ένας πίνακας που έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ονομάζεται **τετραγωνικός πίνακας**.

• Ένας πίνακας που έχει μόνο μία γραμμή ονομάζεται **πίνακας-γραμμή**.

• Ένας πίνακας που έχει μόνο μία στήλη ονομάζεται **πίνακας-στήλη**.

• Ένας πίνακας που έχει μόνο ένα στοιχείο ονομάζεται **πίνακας-στοιχείο** και μπορούμε να τον θεωρούμε απλό αριθμό όποτε αυτό χρειαστεί.

• Αν $A = [a_{i,j}]$ είναι ένας τετραγωνικός $\nu \times \nu$ πίνακας, τότε τα στοιχεία $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $\ldots$, $a_{\nu,\nu}$ ονομάζονται **διαγώνια στοιχεία** του πίνακα A και σχηματίζουν την **κύρια διαγώνιο** του A.

• Ένας τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά ονομάζεται **άνω τριγωνικός πίνακας**.

• Ένας τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά ονομάζεται **κάτω τριγωνικός πίνακας**.

• Ένας τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του εκτός της κύριας διαγωνίου είναι μηδενικά ονομάζεται **διαγώνιος πίνακας**.

• Για ένα $\mu \times \nu$ πίνακα $A = [a_{i,j}]$, ο $\nu \times \mu$ πίνακας $A^T = [a_{j,i}]$ (όπου οι γραμμές γίνονται στήλες και οι στήλες γίνονται γραμμές) ονομάζεται **ανάστροφος** του A.

• Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **συμμετρικός πίνακας** αν $A^T = A$ (δηλαδή, παρουσιάζει συμμετρία ως προς την κύρια διαγώνιο).

Άσκηση

Βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, *οι πίνακες*

$$A = \begin{bmatrix} x+y & 1 \\ 2x-1 & 1-x^2 \end{bmatrix} \;\; \textit{και} \;\; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ίσοι.

Άσκηση

Βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, *ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & x^2-5x+6 \\ 0 & x-3 & x^2-4 \\ (x-2)\ln x & x^2-3x+2 & 6 \end{bmatrix}$$

είναι (α) άνω τριγωνικός, (β) κάτω τριγωνικός, και (γ) διαγώνιος.

Άθροισμα δύο $\mu \times \nu$ πινάκων $A = [a_{i,j}]$ και $B = [b_{i,j}]$ ονομάζεται ο $\mu \times \nu$ πίνακας που κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $A + B$ και γράφουμε

$$\boxed{A + B = [a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j}]\,.}$$

Το άθροισμα των $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -11 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ είναι

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -11 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+(-1) \\ 3+0 & 4+(-11) \\ 5+6 & 6+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}.$$

Βαθμωτό γινόμενο ενός $\mu \times \nu$ πίνακα $A = [a_{i,j}]$ με έναν αριθμό λ ονομάζεται ο $\mu \times \nu$ πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία του A με τον λ. Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με λA και γράφουμε

$$\boxed{\lambda A = \lambda \left[a_{i,j}\right] = \left[\lambda a_{i,j}\right].}$$

Το βαθμωτό γινόμενο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ με τον αριθμό $\lambda = -3$ είναι

$$\lambda A = (-3) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,(-3) & -2\,(-3) \\ -3\,(-3) & 4\,(-3) \\ 5\,(-3) & -6\,(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 9 & -12 \\ -15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες Πρόσθεσης & Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού

Για $\mu \times \nu$ πίνακες $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ και $C = [c_{i,j}]$, και αριθμούς λ και κ, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $A + B = B + A$ (**αντιμεταθετική**).
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (**προσεταιριστική**).
3. Αν $\mathbb{O}$ είναι ο $\mu \times \nu$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του μηδενικά (**μηδενικός**), τότε $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$.
4. Αν $-A = [-a_{i,j}]$ είναι ο $\mu \times \nu$ πίνακας με στοιχεία αντίθετα από τα αντίστοιχα στοιχεία του A, τότε $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}$ (**αντίθετος**).
5. Η **διαφορά** των πινάκων A και B ορίζεται ως $A - B = A + (-B) = [a_{i,j} - b_{i,j}]$.
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ και $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$ (**επιμεριστική**).
7. $\lambda(\kappa A) = \kappa(\lambda A) = (\lambda\kappa)A$.
8. $1\,A = A$, $(-1)A = -A$, και $\lambda A = \mathbb{O} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $A = \mathbb{O}$.
9. $A + B = C \Leftrightarrow A = C - B$.
10. $(A + B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Για $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&11\\1&-1\end{bmatrix}$ και $C=\begin{bmatrix}0&2\\0&4\\-5&-1\end{bmatrix}$, εκτελούμε τις πράξεις:

$$A+B=\begin{bmatrix}2&1\\2&15\\6&5\end{bmatrix}=B+A,$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}2&3\\2&19\\1&4\end{bmatrix}=A+(B+C),$$

$$2A-(3B+3C)=\begin{bmatrix}-1&1\\9&-37\\22&18\end{bmatrix}=2A-3(B+C),$$

$$(A+B)^T=\begin{bmatrix}2&1\\2&15\\6&5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2&2&6\\1&15&5\end{bmatrix}=A^T+B^T.$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **αντισυμμετρικός πίνακας** αν $A^T = -A$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός διότι $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -A$.

Παρατήρηση

Ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A γράφεται ως άθροισμα του συμμετρικού πίνακα

$$\frac{A + A^T}{2} \quad (\textbf{συμμετρικό μέρος } \textit{του } A)$$

και του αντισυμμετρικού πίνακα

$$\frac{A - A^T}{2} \quad (\textbf{αντισυμμετρικό μέρος } \textit{του } A).$$

Άσκηση

Να επιλυθεί (ως προς τον άγνωστο πίνακα X) η εξίσωση

$$5X - 2\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 10 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 17 & 0 \\ 3 & 30 \end{bmatrix}.$$

Θα ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων, έχοντας στο νου το εσωτερικό γινόμενο $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Αν αντικαταστήσουμε το (x_1, x_2) με τον πίνακα-γραμμή $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$ και το (y_1, y_2) με τον πίνακα-στήλη $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, τότε

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} {\color{red}x_1} & {\color{blue}x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {\color{red}y_1} \\ {\color{blue}y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\color{red}x_1 y_1} + {\color{blue}x_2 y_2} \end{bmatrix}.$$

Γενικότερα, αν θεωρήσουμε έναν $1 \times \nu$ πίνακα-γραμμή

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_\nu \end{bmatrix}$$

κι ένα $\nu \times 1$ πίνακα-στήλη

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\nu \end{bmatrix},$$

τότε μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} {\color{red}x_1} & {\color{blue}x_2} & \cdots & x_\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {\color{red}y_1} \\ {\color{blue}y_2} \\ \vdots \\ y_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\color{red}x_1 y_1} + {\color{blue}x_2 y_2} + \cdots + x_\nu y_\nu \end{bmatrix}.$$

το οποίο καλούμε **γινόμενο γραμμής επί στήλη**.

Για ένα $\mu \times \nu$ πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \cdots & a_{\mu,\nu} \end{bmatrix}$ κι

ένα $\nu \times 1$ πίνακα-στήλη $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\nu \end{bmatrix}$, ορίζουμε το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
A \cdot Y &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \cdots & a_{\mu,\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\nu \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,\nu}y_\nu \\ a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,\nu}y_\nu \\ \vdots \\ a_{\mu,1}y_1 + a_{\mu,2}y_2 + \cdots + a_{\mu,\nu}y_\nu \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

το οποίο καλούμε **γινόμενο πίνακα επί στήλη**.

Για ένα $\mu \times \nu$ πίνακα $A = [a_{i,j}]$ κι ένα $\nu \times \rho$ πίνακα $B = [b_{i,j}]$, το γινόμενο $A \cdot B$ προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό του A με τις στήλες του B:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \cdots & a_{\mu,\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,\rho} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,\rho} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\nu,1} & b_{\nu,2} & \cdots & b_{\nu,\rho} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{\nu,1} \end{bmatrix} & A \cdot \begin{bmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ \vdots \\ b_{\nu,2} \end{bmatrix} & \cdots & A \cdot \begin{bmatrix} b_{1,\rho} \\ b_{2,\rho} \\ \vdots \\ b_{\nu,\rho} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + \cdots + a_{1,\nu}b_{\nu,1} & a_{1,1}b_{1,2} + \cdots + a_{1,\nu}b_{\nu,2} & \cdots \\ a_{2,1}b_{1,1} + \cdots + a_{2,\nu}b_{\nu,1} & a_{2,1}b_{1,2} + \cdots + a_{2,\nu}b_{\nu,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ a_{\mu,1}b_{1,1} + \cdots + a_{\mu,\nu}b_{\nu,1} & a_{\mu,1}b_{1,2} + \cdots + a_{\mu,\nu}b_{\nu,2} & \cdots \end{bmatrix}$$

και καλείται **γινόμενο πινάκων**.

Γινόμενο ενός $\mu \times \nu$ πίνακα $A = [a_{i,j}]$ κι ενός $\nu \times \rho$ πίνακα $B = [b_{i,j}]$ ονομάζεται ο $\mu \times \rho$ πίνακας $A \cdot B$, ή απλούστερα AB, του οποίου κάθε στοιχείο ισούται με το γινόμενο της i-γραμμής του A και της j-στήλης του B, δηλαδή

$$\boxed{AB = [a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,\nu}b_{\nu,j}]\,.}$$

Για να οριστεί το γινόμενο AB, πρέπει το πλήθος των στηλών του αριστερού πίνακα A να ισούται με το πλήθος των γραμμών του δεξιού πίνακα B. Επίσης, όταν ο πίνακας AB ορίζεται, τότε το πλήθος των γραμμών του ισούται με το πλήθος των γραμμών του A και το πλήθος των στηλών του ισούται με το πλήθος των στηλών του B.

$$\underset{(\mu \times \nu)}{A = [a_{i,j}]}\,,\ \underset{(\nu \times \rho)}{B = [b_{i,j}]} \longrightarrow \underset{(\mu \times \rho)}{AB} = [a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,\nu}b_{\nu,j}]$$

Για $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ και $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$,

έχουμε:

$$AB = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -10 & 12 \end{bmatrix},$$

$$BA = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline -2 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$CA = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix},$$

$$BC = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline -2 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix},$$

ενώ τα γινόμενα AC και CB είναι αδύνατα.

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Πινάκων

Για πίνακες $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ και $C = [c_{i,j}]$ καταλλήλων διαστάσεων και αριθμούς λ και κ, ισχύουν οι ιδιότητες:

1. Γενικά, $AB \neq BA$ (**όχι αντιμεταθετική**).
2. $(AB)C = A(BC)$ (**προσεταιριστική**).
3. $A(B + C) = AB + AC$ και $(B + C)A = BA + CA$ (**επιμεριστική**).
4. Αν I_ν είναι ο $\nu \times \nu$ διαγώνιος πίνακας με όλα τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με 1, τότε για κάθε $\mu \times \nu$ πίνακα A, ισχύει $A I_\nu = A$ και $I_\mu A = A$ (**μοναδιαίος**).
5. $(\lambda A)(\kappa B) = (\lambda\kappa)(AB)$.
6. $(AB)^T = B^T A^T$.
7. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A, μπορούμε να ορίσουμε τις δυνάμεις του $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA = A^2 A = AA^2$, κ.ο.κ. Επιπλέον,

$$A^m A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn} \quad \text{και} \quad (\lambda A)^m = \lambda^m A^m.$$

Παρατήρηση

Το γινόμενο δύο άνω (ή κάτω) τριγωνικών πινάκων είναι πάντα ένας άνω (αντίστοιχα, κάτω) τριγωνικός πίνακας. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 0 & 8 & 19 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση

Η έλλειψη της αντιμεταθετικής ιδιότητας έχει ως αποτέλεσμα να μην ισχύουν γνωστές ταυτότητες. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2, \\
(A-B)^2 &= (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2, \\
(A+B)(A-B) &= A^2 - AB + BA - B^2, \\
(A-B)(A+B) &= A^2 + AB - BA - B^2 \ \text{κ.ο.κ.}
\end{aligned}$$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι, αν για δύο $\nu \times \nu$ *πίνακες* A *και* B, *ισχύει* $A^2 = A$, $B^2 = B$ *και* $(A+B)^2 = A+B$ (**προβολικοί πίνακες**), *τότε* $AB = BA = \mathbb{O}$.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι, για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *ισχύει* $A^m = A^{m-2} + A^2 - I_3$, *για* $m = 3, 4, 5, \ldots$ *Έπειτα να υπολογίσετε τον* A^{100}.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι, αν ένας 3×3 *πίνακας* $A = [a_{i,j}]$ *αντιμετατίθεται (στον πολλαπλασιασμό) με όλους τους* 3×3 *πίνακες, τότε είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του* I_3.

Για έναν τετραγωνικό πίνακα A, το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του ονομάζεται **ίχνος** του A και συμβολίζεται με $\operatorname{trace}(A)$. Είναι προφανές ότι $\operatorname{trace}\left(A^T\right) = \operatorname{trace}(A)$. Επιπλέον, για δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A, B και δύο αριθμούς λ, κ, ισχύει

$$\operatorname{trace}(\lambda A + \kappa B) = \lambda \operatorname{trace}(A) + \kappa \operatorname{trace}(B).$$

Για τους $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, έχουμε $\operatorname{trace}(A) = 6 = \operatorname{trace}(A^T)$, $\operatorname{trace}(B) = 4 = \operatorname{trace}(B^T)$ και

$$\operatorname{trace}(2A+B) = \operatorname{trace}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}\right) = 16 = 2\operatorname{trace}(A) + \operatorname{trace}(B).$$

Πρόταση

Για $\nu \times \nu$ *πίνακες* A *και* B*, ισχύει* $\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Πρόταση

Έστω ένας $\nu \times \nu$ *πραγματικός πίνακας* A*. Αν ισχύει* $\operatorname{trace}(A^T A) = 0$*, τότε* $A = \mathbb{O}$.

Απόδειξη.

Ναι. $\square$

Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A. Αν υπάρχει $\nu \times \nu$ πίνακας B τέτοιος ώστε

$$\boxed{AB = BA = I_\nu,}$$

τότε ο A ονομάζεται **αντιστρέψιμος** και ο B ονομάζεται **αντίστροφος** του A (προφανώς, και ο A είναι αντίστροφος του B). Αν δεν υπάρχει τέτοιος B, τότε ο A ονομάζεται **μη αντιστρέψιμος**.

Ο $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ είναι αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ διότι

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+6 & -10+10 \\ 3-3 & 6-5 \end{bmatrix} = I_2$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+6 & 2-2 \\ -15+15 & 6-5 \end{bmatrix} = I_2.$$

Πρόταση

Αν για $\nu \times \nu$ πίνακες A και B ισχύει μία από τις ισότητες $AB = I_\nu$ και $BA = I_\nu$, τότε θα ισχύει και η άλλη.

Απόδειξη.

Όχι. □

Πρόταση

Αν ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και B είναι ένας αντίστροφος του A, τότε ο B είναι ο μοναδικός αντίστροφος του A.

Απόδειξη.

Ναι. □

Η μοναδικότητα του αντιστρόφου του A μας επιτρέπει να τον συμβολίσουμε με A^{-1}. Προφανώς, $(A^{-1})^{-1} = A$.

Έστω τρεις πίνακες A, B και C, με A αντιστρέψιμο.

Αν $AC = B$, τότε $AC = B \Rightarrow A^{-1}(AC) = A^{-1}B \Rightarrow \left(A^{-1}A\right) C = A^{-1}B \Rightarrow I\,C = A^{-1}B \Rightarrow C = A^{-1}B$.

Αν $CA = B$, τότε $CA = B \Rightarrow (CA)A^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow C\left(AA^{-1}\right) = BA^{-1} \Rightarrow C\,I = BA^{-1} \Rightarrow C = BA^{-1}$.

Πρόταση

Αν δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε και το γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμος πίνακας και

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.}$$

Απόδειξη.

Ναι. $\square$

Παράδειγμα (Κρυπτογραφία)

Αντιστοιχούμε κάθε γράμμα της αλφαβήτου σε έναν αριθμό από το 1 *ως το* 24 *και το κενό στο* 0:

A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω
5	19	13	9	24	12	8	22	1	20	18	10	23	3	14	2	11	6	21	16	4	15	7	17

Ένα μήνυμα όπως η φράση "O $AET O\Sigma$ $\Pi ETA\Xi E$" *μπορεί να γραφεί ως η ακολουθία* $14, 0, 5, 24, 21, 14, 6, 0, 2, 24, 21, 5, 3, 24$, *η οποία μπορεί να αποτυπωθεί στον πίνακα*

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 5 & 24 \\ 21 & 14 & 6 & 0 \\ 2 & 24 & 21 & 5 \\ 3 & 24 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα και τους πίνακες

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 15 & -17 & -3 & 16 \\ -7 & 8 & 1 & -7 \\ -3 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

όπου ο αποστολέας γνωρίζει μόνο τον C και ο παραλήπτης γνωρίζει μόνο τον C^{-1}.

Το μήνυμα κωδικοποιείται από τον αποστολέα, πολλαπλασιάζοντας τον A από δεξιά με τον C:

$$B = AC = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 5 & 24 \\ 21 & 14 & 6 & 0 \\ 2 & 24 & 21 & 5 \\ 3 & 24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 33 & -1 & 107 \\ 29 & 43 & 50 & 37 \\ 5 & 34 & 2 & 171 \\ 27 & 51 & 30 & 45 \end{bmatrix}.$$

Το κωδικοποιημένο μήνυμα στέλνεται στον παραλήπτη, ο οποίος το αποκωδικοποιεί, πολλαπλασιάζοντας τον B από δεξιά με τον C^{-1} προκειμένου να καταλήξει στον αρχικό πίνακα A:

$$BC^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 33 & -1 & 107 \\ 29 & 43 & 50 & 37 \\ 5 & 34 & 2 & 171 \\ 27 & 51 & 30 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & -17 & -3 & 16 \\ -7 & 8 & 1 & -7 \\ -3 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 5 & 24 \\ 21 & 14 & 6 & 0 \\ 2 & 24 & 21 & 5 \\ 3 & 24 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση

Να κατασκευάσετε τον αντίστροφο του 2×2 *πίνακα* $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *ικανοποιεί τη σχέση* $A^3 - 8A^2 + 20A - 16I = \mathbb{O}$. *Έπειτα να υπολογίσετε τον* A^{-1} *(αν υπάρχει).*

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι αν A *και* B *είναι δύο* $\nu \times \nu$ *πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας* $I_\nu - AB$ *να είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο πίνακας* $I_\nu - BA$ *είναι αντιστρέψιμος και* $(I_\nu - BA)^{-1} = I_\nu + B\,(I_\nu - AB)^{-1}\,A$.

Ορίζουσες

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα είναι μία ποσότητα που εξαρτάται από τα στοιχεία του πίνακα και μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες γι΄ αυτόν. Για παράδειγμα, ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του 0.

Η **ορίζουσα ενός** 2×2 **πίνακα** $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ είναι (όπως γνωρίζουμε από το σχολείο)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Η **ορίζουσα ενός** 3×3 **πίνακα** $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$

είναι (σύμφωνα με τον **Κανόνα του Sarrus**)

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right. = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$$

$$+ a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3},$$

όπου τα γινόμενα της κύριας διαγώνιου και των δύο παραλλήλων της έχουν θετικό πρόσημο, ενώ τα γινόμενα των υπολοίπων τριών διαγωνίων έχουν αρνητικό πρόσημο.

Αν στην **ορίζουσα ενός** $\nu \times \nu$ **πίνακα** $A = [a_{i,j}]$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} j\text{-στήλη} \\ \downarrow \end{array} & \\
|A| = & \left|\begin{array}{ccc|c|cc}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,\nu} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,\nu} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,\nu} \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{\nu,1} & a_{\nu,2} & \cdots & a_{\nu,j} & \cdots & a_{\nu,\nu}
\end{array}\right| & \leftarrow i\text{-γραμμή}
\end{array}
$$

διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη, προκύπτει μία $(\nu-1)\times(\nu-1)$ ορίζουσα η οποία συμβολίζεται με $M_{i,j}$ και ονομάζεται **ελάσσονα υποορίζουσα** του $a_{i,j}$. Ο αριθμός $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$ ονομάζεται **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του $a_{i,j}$, ενώ ο $\nu \times \nu$ πίνακας

$$
\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix}
A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{\nu,1} \\
A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{\nu,2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{1,\nu} & A_{2,\nu} & \cdots & A_{\nu,\nu}
\end{bmatrix}
$$

ονομάζεται **συμπληρωματικός** του A.

Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, έχουμε

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \; A_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \; A_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5, \; A_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Ο συμπληρωματικός του πίνακα A είναι

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Η **ορίζουσα** ενός $\nu \times \nu$ πίνακα $A = [a_{i,j}]$ δίνεται από τις ισότητες

$$\det(A) = |A| = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \cdots + a_{i,\nu}A_{i,\nu}$$

(ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς την i-γραμμή)

και

$$\det(A) = |A| = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{\nu,j}A_{\nu,j}\ .$$

(ανάπτυγμα κατά Laplace ως προς την j-στήλη)

Για παράδειγμα, υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$ εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα κατά Laplace (ως προς τις γραμμές με κόκκινο χρώμα):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$+(-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(1\,(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\left(1\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$+2\left(1\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -(-4) + 36 + 2(-14) = 12.$$

Όποια επιλογή γραμμών ή στηλών κι αν κάνουμε για να εφαρμόσουμε το ανάπτυγμα κατά Laplace, το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο.

Όταν αναπτύσσουμε κατά Laplace την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα, μπορούμε να λαμβάνουμε τους όρους $(-1)^{i+j}$ απευθείας από τον πίνακα προσήμων

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα, υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, (α) αναπτύσσοντας κατά Laplace ως προς την 1η γραμμή, (β) αναπτύσσοντας κατά Laplace ως προς την 3η στήλη.

(α) Αναπτύσσουμε κατά Laplace ως προς την 1η γραμμή:

$$\begin{vmatrix} 1^{(+)} & 2^{(-)} & 3^{(+)} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 45 - 48 - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

(β) Αναπτύσσουμε κατά Laplace ως προς την 3η στήλη:

$$\begin{vmatrix} 1^{(+)} & 2^{(-)} & 3^{(+)} \\ 4 & 5 & 6^{(-)} \\ 7 & 8 & 9^{(+)} \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(32 - 35) - 6(8 - 14) + 9(5 - 8) = -9 + 36 - 27 = 0.$$

Ιδιότητες Οριζουσών

1. Για το μοναδιαίο πίνακα I_ν, ισχύει $\det(I_\nu) = 1$.
2. Αν ο $B = [b_{i,j}]$ προκύπτει από τον A με αντιμετάθεση δύο γραμμών ή με αντιμετάθεση δύο στηλών του A, τότε $\det(B) = -\det(A)$.
3. Αν ο $B = [b_{i,j}]$ προκύπτει από τον A με πολλαπλασιασμό μιας γραμμής (ή στήλης) του A με έναν αριθμό λ, τότε $\det(B) = \lambda \det(A)$.
4. Ισχύει (για οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη) η διάσπαση

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,3}+c_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,3}+c_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_{3,3}+c_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & c_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & c_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & c_{3,3} \end{vmatrix}.$$

5. Αν ο $B = [b_{i,j}]$ προκύπτει από τον A με πρόσθεση ενός πολλαπλάσιου μιας γραμμής (ή στήλης) του A σε μία άλλη γραμμή του (αντίστοιχα, στήλη του), τότε $\det(B) = \det(A)$.
6. $\det(A^T) = \det(A)$.

Κάποια απλά 2×2 παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

- $$\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \gamma\beta - \delta\alpha = -(\delta\alpha - \gamma\beta) = -\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$
- $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{vmatrix} = \alpha(\lambda\delta) - \beta(\lambda\gamma) = \lambda(\alpha\delta - \beta\gamma) = \lambda\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$
- $$\begin{vmatrix} \alpha+\zeta & \beta+\xi \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = (\alpha+\zeta)\delta - (\beta+\xi)\gamma$$ $$= \alpha\delta - \beta\gamma + \zeta\delta - \xi\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$
- $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma+\lambda\alpha & \delta+\lambda\beta \end{vmatrix} = \alpha(\delta+\lambda\beta) - \beta(\gamma+\lambda\alpha)$$ $$= \alpha\delta - \beta\gamma + \alpha\lambda\beta - \beta\lambda\alpha = \alpha\delta - \beta\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$
- $$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

Πρόταση

Για δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A και B, ισχύει

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B).$$

Απόδειξη.

Όχι. □

Παρατηρήσεις

Για κάθε $\nu \times \nu$ πίνακα A και για κάθε αριθμό λ, ισχύει $\det(\lambda A) = \lambda^{\nu}\det(A)$.

Αν μία γραμμή (ή στήλη) του A είναι μηδενική ή πολλαπλάσια κάποιας άλλης γραμμής (αντίστοιχα, στήλης) του A, τότε $\det(A) = 0$.

Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα A ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του A.

Παρατήρηση

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$1 = |\,I\,| = |AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}| \;\Rightarrow\; |A^{-1}| = \frac{1}{|A|},$$

όπου είναι προφανές ότι $|A| \neq 0$.

Άσκηση

Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, *μετασχηματίζοντάς τη σε τριγωνική μορφή.*

Άσκηση

Βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, μηδενίζεται η ορίζουσα του $\nu \times \nu$ πίνακα $A = \begin{bmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{bmatrix}$.

Θεώρημα

Έστω ένας $\nu \times \nu$ *πίνακας* A *και ο συμπληρωματικός του,* $\mathrm{adj}(A)$*. Τότε ισχύει*

$$\boxed{A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = |A|\, I_\nu.}$$

Απόδειξη.

Όχι. □

Θεώρημα

Ένας $\nu \times \nu$ *πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* $|A| \neq 0$*. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, ο αντίστροφος του* A *δίνεται από την ισότητα*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A).}$$

Απόδειξη.

Όχι. □

Όπως έχουμε δει, ο συμπληρωματικός του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A κατά Laplace ως προς την 3η γραμμή, έχουμε

$$|A| = 2 \cdot A_{3,1} + 0 \cdot A_{3,2} + 1 \cdot A_{3,3} = 2 \cdot (-5) + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -7 \neq 0.$$

Επομένως, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι, για ένα $\nu \times \nu$ αντιστρέψιμο πίνακα A, ισχύει

$$\boxed{|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{\nu-1} \quad \textit{και} \quad \mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = |A|^{\nu-2}A.}$$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι, για δύο $\nu \times \nu$ αντιστρέψιμους πίνακες A και B, ισχύει

$$\boxed{\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A).}$$

Άσκηση

Βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{bmatrix},$$

όπου α, β *και* γ *είναι διακεκριμένες παράμετροι.*

Άσκηση

Υπολογίστε τον πίνακα A *για τον οποίο ισχύει*

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Γραμμικά Συστήματα

Η θεωρία των γραμμικών συστημάτων αποτελεί για πολλούς τη βάση της Γραμμικής Άλγεβρας, και είναι ένα αντικείμενο που βρίσκει εφαρμογές σε πολυάριθμα προβλήματα των σύγχρονων Μαθηματικών. Θα μελετήσουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss και τον κανόνα του Cramer για την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Ένα σύστημα μ γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους, της μορφής

$$
(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,\nu}x_\nu & = & \beta_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,\nu}x_\nu & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + \cdots + a_{\mu,\nu}x_\nu & = & \beta_\mu \end{array} \right.
$$

ονομάζεται $\mu \times \nu$ **γραμμικό σύστημα**.

Κάθε ν-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ που ικανοποιεί ταυτόχρονα όλες τις εξισώσεις του (Σ) ονομάζεται **λύση** του συστήματος. Για παράδειγμα, η 3-άδα $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ είναι λύση του γραμμικού συστήματος

$$
(\Sigma') \qquad \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y + 2z = 3 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \end{array} \right. ,
$$

διότι $3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 3$ και $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 1$.

Ένα γραμμικό σύστημα που έχει λύση ονομάζεται **συμβιβαστό**, ενώ αυτό που δεν έχει καμία λύση ονομάζεται **ασυμβίβαστο** ή **αδύνατο**. Το σύνολο όλων των λύσεων ενός γραμμικού συστήματος ονομάζεται **γενική λύση** του συστήματος. Δύο γραμμικά συστήματα με την ίδια ακριβώς γενική λύση ονομάζονται **ισοδύναμα**.

Για το γραμμικό σύστημα (Σ'), προσθέτοντας την 1η εξίσωση στη 2η, έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+4y+2z=3 \\ 5x+\ \ y \qquad\ \ =4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{17}{2}x-\dfrac{13}{2} \\ y=4-5x \end{array}\right. .$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν θεωρήσουμε τον άγνωστο x ως έναν αυθαίρετο αριθμό λ, τότε η γενική λύση του (Σ') είναι η άπειρη οικογένεια τριάδων της μορφής

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \left(x,4-5x,\frac{17}{2}x-\frac{13}{2}\right)=\left(\lambda,4-5\lambda,\frac{17}{2}\lambda-\frac{13}{2}\right)\\ &= \lambda\left(1,-5,\frac{17}{2}\right)+\left(0,4,-\frac{13}{2}\right) \quad (\lambda:\ \text{αυθαίρετος}).\end{aligned}$$

Αν στο γραμμικό σύστημα (Σ) θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \cdots & a_{\mu,\nu} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

τους οποίους ονομάζουμε **πίνακα των συντελεστών**, **πίνακα-στήλη των αγνώστων** και **πίνακα-στήλη των σταθερών όρων**, αντίστοιχα, τότε το (Σ) γράφεται

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \cdots & a_{\mu,\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B.}$$

Ιδιαίτερο ρόλο στην επίλυση του γραμμικού συστήματος (Σ) παίζει ο $\mu \times (\nu + 1)$ πίνακας

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} & \beta_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\nu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \cdots & a_{\mu,\nu} & \beta_\mu \end{array}\right],$$

ο οποίος ονομάζεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος και αναπαριστάνει ακριβώς το σύστημα.

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί

(α) να μην έχει λύσεις, δηλαδή να είναι αδύνατο, όπως το

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 9x + 6y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 0x + 0y = -1 \end{cases},$$

(β) να έχει μία μοναδική λύση, όπως το

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -2x \qquad = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -2 \end{cases},$$

(γ) να έχει άπειρες λύσεις, όπως το σύστημα (Σ').

Κάθε γραμμικό σύστημα που έχει άπειρες λύσεις ονομάζεται **αόριστο**.

Αν για ένα $\nu \times \nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$, ο πίνακας συντελεστών A είναι αντιστρέψιμος, τότε είναι προφανές ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση τη $X = A^{-1}B$.

Αν όλοι οι σταθεροί όροι ενός γραμμικού συστήματος είναι μηδενικοί, τότε το σύστημα ονομάζεται **ομογενές** και γράφεται $AX = \mathbb{O}$. Κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα $AX = \mathbb{O}$ έχει τουλάχιστον μία λύση, την τετριμμένη μηδενική λύση $X = \mathbb{O}$. Δηλαδή, δεν μπορεί να είναι αδύνατο, και ικανοποιεί ένα από τα ακόλουθα:

(α) έχει μοναδική λύση τη $X = \mathbb{O}$,

(β) έχει άπειρες λύσεις, μεταξύ των οποίων και τη $X = \mathbb{O}$.

Πρόταση

Έστω ένα $\mu \times \nu$ συμβιβαστό γραμμικό σύστημα $AX = B$ και μία (μερική) λύση Y_1 αυτού. Τότε η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού συστήματος $AX = \mathbb{O}$ είναι Y_0 αν και μόνο αν η γενική λύση του συστήματος $AX = B$ είναι $Y = Y_0 + Y_1$.

Απόδειξη.

Ναι. □

Σημαντικό ρόλο στην ανάλυσή μας παίζουν οι **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών** ενός πίνακα $A = [a_{i,j}]$, όπως ονομάζονται οι ακόλουθες πράξεις:

(I) Αντιμετάθεση της i-γραμμής και της k-γραμμής, την οποία συμβολίζουμε με $(\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_k)$.

(II) Πολλαπλασιασμός της i-γραμμής με έναν αριθμό λ, τον οποίο συμβολίζουμε με $(\lambda\Gamma_i)$.

(III) Πολλαπλασιασμός της i-γραμμής με έναν αριθμό λ και πρόσθεση του αποτελέσματος στην k-γραμμή $(k \neq i)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $(\Gamma_k + \lambda\Gamma_i)$.

Πρόταση

Αν στον επαυξημένο πίνακα ενός γραμμικού συστήματος εφαρμόσουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, τότε λαμβάνουμε τον επαυξημένο πίνακα ενός γραμμικού συστήματος που είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

Απόδειξη.

Όχι.

□

Ένας $\mu \times \nu$ πίνακας A λέγεται ότι είναι σε **κλιμακωτή μορφή** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(α) Αν ο A έχει μηδενικές γραμμές, τότε αυτές βρίσκονται κάτω από τις μη μηδενικές γραμμές του.

(β) Σε κάθε μη μηδενική γραμμή του A, το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο της βρίσκεται δεξιότερα των πρώτων από αριστερά μη μηδενικών στοιχείων των παραπάνω της γραμμών.

Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι σε κλιμακωτή μορφή,

Ένας $\mu \times \nu$ πίνακας A λέγεται ότι είναι σε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** αν είναι σε κλιμακωτή μορφή κι επιπλέον ικανοποιεί τις συνθήκες:

(γ) Σε κάθε μη μηδενική γραμμή του A, το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο ισούται με 1.

(δ) Σε κάθε μη μηδενική γραμμή του πίνακα A, το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που αυτό ανήκει.

Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Αν ένας $\mu \times \nu$ πίνακας A είναι σε κλιμακωτή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, τότε το πρώτο από αριστερά μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του ονομάζεται **οδηγό στοιχείο**.

Ένα γραμμικό σύστημα που είναι σε κλιμακωτή μορφή επιλύεται εύκολα με μεταφορά στο δεξιό μέλος ως ελεύθερων παραμέτρων των αγνώστων που <u>δεν</u> αντιστοιχούν σε οδηγά στοιχεία και με διαδοχικές αντικαταστάσεις ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση.

Ένα γραμμικό σύστημα που είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή επιλύεται άμεσα με μεταφορά στο δεξιό μέλος ως ελεύθερων παραμέτρων των αγνώστων που <u>δεν</u> αντιστοιχούν σε οδηγά στοιχεία, χωρίς άλλες πράξεις.

Βάσει των παραπάνω παρατηρήσεων και της τελευταίας πρότασης, μπορούμε να επιλύσουμε ένα $\mu \times \nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$ μετασχηματίζοντας τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ σε κλιμακωτή ή ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $[A'|B']$.

Ο πίνακας $[A'|B']$ είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος $A'X = B'$, το οποίο είναι ισοδύναμο (δηλαδή έχει την ίδια γενική λύση) με το αρχικό σύστημα $AX = B$, κι επιλύεται εύκολα.

Η μεθοδολογία αυτή ονομάζεται **μέθοδος απαλοιφής Gauss** αν εφαρμόζεται μέσω κλιμακωτής μορφής, ή **μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan** αν εφαρμόζεται μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.

Άσκηση

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 1 \\ 2x + y + 2z - w = 2 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases},$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss στον επαυξημένο του πίνακα.

Άσκηση

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z - w = 2 \\ 2x - 3y + z + w = 3 \\ 3x + 2y - z - w = 0 \\ 5y + z - 2w = 5 \end{cases},$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss στον επαυξημένο του πίνακα.

Άσκηση

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 4y + 12z - 10w = 58 \\ -x + 2y \; - 3z \; + 2w = -14 \\ 2x - 4y \; + 9z \; - 6w = 42 \end{cases},$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan στον επαυξημένο του πίνακα.

Άσκηση

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x \; + y \; + z = 1 \\ x + \alpha y \; + z = 1 \\ x \; + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α, εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss στον επαυξημένο του πίνακα.

Έστω ένας $\nu \times \nu$ αντιστρέψιμος πίνακας A. Συμβολίζουμε τις στήλες του A^{-1} με $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ και τις στήλες του I_ν με $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_\nu$. Τότε η σχέση $AA^{-1} = I_\nu$ γράφεται

$$A\left[\, X_1 \mid X_2 \mid \cdots \mid X_\nu \,\right] = \left[\, \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_\nu \,\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\, AX_1 \mid AX_2 \mid \cdots \mid AX_\nu \,\right] = \left[\, \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_\nu \,\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad AX_1 = \mathbf{e}_1, \quad AX_2 = \mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad AX_\nu = \mathbf{e}_\nu.$$

Δηλαδή, το πρόβλημα υπολογισμού του A^{-1} ανάγεται στο πρόβλημα επίλυσης των ν γραμμικών συστημάτων

$$AX = \mathbf{e}_1, \quad AX = \mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad AX = \mathbf{e}_\nu,$$

τα οποία έχουν μοναδικές λύσεις τις στήλες του A^{-1}

$$X_1 = A^{-1}\mathbf{e}_1, \quad X_2 = A^{-1}\mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad X_\nu = A^{-1}\mathbf{e}_\nu.$$

Αντί να επιλύσουμε κάθε γραμμικό σύστημα ξεχωριστά, εργαζόμενοι στους επαυξημένους πίνακες

$$[A|\mathbf{e}_1]\,,\quad [A|\mathbf{e}_2]\,,\quad \ldots,\quad [A|\mathbf{e}_\nu]\,,$$

μπορούμε να επιλύσουμε ταυτόχρονα και τα ν συστήματα εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan στο $\nu \times (2\nu)$ διευρυμένο επαυξημένο πίνακα

$$[A|I_\nu] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} A & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_\nu \end{array}\right].$$

Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, καταλήγουμε σε έναν $\nu \times (2\nu)$ ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα της μορφής

$$[I_\nu|Z] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} I_\nu & X_1 & X_2 & \cdots & X_\nu \end{array}\right] = \left[I_\nu|A^{-1}\right].$$

Σχηματικά, έχουμε

$$\boxed{[A|I_\nu] \longrightarrow [I_\nu|Z] \;\Leftrightarrow\; Z = A^{-1}.}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan στον διευρυμένο επαυξημένο πίνακα $[A|I_3]$.

Έστω ένα $\nu \times \nu$ γραμμικό σύστημα

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu,1} & a_{\nu,2} & \cdots & a_{\nu,\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο πίνακας των συντελεστών A είναι αντιστρέψιμος. Στην περίπτωση αυτή, η μοναδική λύση του είναι

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)\,B \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{\nu,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{\nu,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,\nu} & A_{2,\nu} & \cdots & A_{\nu,\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \beta_1 A_{1,1} + \beta_2 A_{2,1} + \cdots + \beta_\nu A_{\nu,1} \\ \beta_1 A_{1,2} + \beta_2 A_{2,2} + \cdots + \beta_\nu A_{\nu,2} \\ \vdots \\ \beta_1 A_{1,\nu} + \beta_2 A_{2,\nu} + \cdots + \beta_\nu A_{\nu,\nu} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε με D την ορίζουσα $|A|$, και για κάθε $k = 1, 2, \ldots, \nu$, συμβολίσουμε με D_{x_k} την ορίζουσα που προκύπτει από τον A με αντικατάσταση της k-στήλης του A από τη στήλη B των σταθερών όρων, τότε έχουμε:

Θεώρημα (Κανόνας του Cramer)

Ένα $\nu \times \nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο πίνακας συντελεστών A έχει ορίζουσα $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$$\boxed{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \ldots, \frac{D_{x_\nu}}{D}\right),}$$

όπου $D, D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_\nu}$ είναι οι ορίζουσες που ορίσαμε παραπάνω.

Απόδειξη.

Όχι. □

Συμπληρωματικά, όταν ο A έχει ορίζουσα $D = |A| = 0$, έχουμε τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) Αν έστω και μία από τις ορίζουσες $D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_\nu}$ δεν είναι μηδενική, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

(β) Αν $D_{x_1} = D_{x_2} = \cdots = D_{x_\nu} = 0$, τότε το γραμμικό σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο, και μπορεί να διερευνηθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Άσκηση

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z - w = 2 \\ x - y + 2z - w = 1 \\ -x + y - 3z + w = -4 \\ 2x + y + 3z - w = 9 \end{cases},$$

εφαρμόζοντας τον κανόνα του Cramer.

Άσκηση

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{array}{rl} x \quad + y \quad - z &= 1 \\ x + \kappa y + 3z &= 2 \\ 2x + 3y + \kappa z &= 3 \end{array}\right. ,$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$, *εφαρμόζοντας τον κανόνα του Cramer.*

Άσκηση

Να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (\alpha+1)x & +y & +z &= 1 \\ x & +(\alpha+1)y & +z &= \alpha \\ x & +y & +(\alpha+1)z &= \alpha^2 \end{array}\right.$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, *εφαρμόζοντας τον κανόνα του Cramer.*

Διανυσματικοί Χώροι

Οι γνώσεις που έχουμε αποκτήσει θα μας επιτρέψουν να αντιληφθούμε πιο καθαρά την αξία της Γραμμικής Άλγεβρας για τα Μαθηματικά, μελετώντας διανυσματικούς χώρους, δηλαδή σύνολα διανυσμάτων εφοδιασμένα με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό.

Διανυσματικός χώρος ονομάζεται ένα μη κενό σύνολο V όπου ορίζονται μία πράξη **διανυσματικής πρόσθεσης**

$$\text{“}+\text{”}: (\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}+\mathbf{v} \in V \ \ (\mathbf{u},\mathbf{v} \in V)$$

και μία πράξη **βαθμωτού πολλαπλασιασμού**

$$\text{“}\cdot\text{”}: (\mathbf{u},\lambda) \mapsto \lambda\cdot\mathbf{u} \in V \ \ (\mathbf{u} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}),$$

οι οποίες, για κάθε **διανύσματα** $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ και αριθμούς λ και κ, ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ (**αντιμεταθετική**).
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (**προσεταιριστική**).
3. Υπάρχει ένα **μηδενικό στοιχείο** $\mathbf{0} \in V$ τέτοιο ώστε $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$, για κάθε $\mathbf{u} \in V$.
4. Για κάθε $\mathbf{u} \in V$, υπάρχει ένα **αντίθετο στοιχείο** του, $-\mathbf{u} \in V$, τέτοιο ώστε $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u})+\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
5. $\lambda\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\cdot\mathbf{u}+\lambda\cdot\mathbf{v}$ και $(\lambda+\kappa)\cdot\mathbf{u} = \lambda\cdot\mathbf{u}+\kappa\cdot\mathbf{u}$ (**επιμεριστική**).
6. $(\lambda\kappa)\cdot\mathbf{u} = \lambda\cdot(\kappa\cdot\mathbf{u}) = \kappa\cdot(\lambda\cdot\mathbf{u})$.
7. $1\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Κλασικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων με τη συνήθη πρόσθεση και τον συνήθη βαθμωτό πολλαπλασιασμό είναι τα ακόλουθα:

- $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2) : \; u_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2\}$.
- $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : \; u_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, 3\}$.
- $\mathbb{R}^4 = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) : \; u_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, 3, 4\}$.
- $\mathbb{R}^\nu = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_\nu) : \; u_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, \ldots, \nu\}$.
- $\mathbb{R}^\infty = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots) : \; u_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\Pi_\nu(\mathbb{R}) = \big\{p(t) = \alpha_\nu t^\nu + \alpha_{\nu-1} t^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0 : \alpha_i \in \mathbb{R}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, \nu\big\}$.
- $\Pi(\mathbb{R}) = \big\{$τα πραγματικά πολυώνυμα $p(t) = \alpha_\nu t^\nu + \alpha_{\nu-1} t^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$ για όλα τα $\nu\big\}$.
- $C[a, b] = \{$οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$.
- $\mathbb{R}^{\mu\times\nu} = \{$οι $\mu \times \nu$ πραγματικοί πίνακες $A = [a_{i,j}]\}$.

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V.

(α) *Το μηδενικό στοιχείο του* V *είναι μοναδικό.*

(β) *Το αντίθετο κάθε στοιχείου* $\mathbf{u} \in V$ *είναι μοναδικό.*

(γ) $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, *για κάθε διάνυσμα* $\mathbf{u} \in V$.

(δ) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, *για κάθε αριθμό* λ.

(ϵ) $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$, *για κάθε διάνυσμα* $\mathbf{u} \in V$.

$(\sigma\tau)$ *Αν* $\lambda \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, *τότε* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *ή* $\lambda = 0$.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Ένα μη κενό υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται **διανυσματικός υπόχωρος**, ή απλούστερα, **υπόχωρος** του V (συμβ. $U \leq V$) αν, εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις διανυσματικής πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V, είναι διανυσματικός χώρος.

Αν για ένα υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V, ισχύει για κάθε διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ και αριθμό λ,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U \quad \text{και} \quad \lambda \mathbf{u} \in U,$$

τότε οι δύο πράξεις ονομάζονται **κλειστές** στο U. Στην περίπτωση αυτή, οι ιδιότητες του ορισμού των διανυσματικών χώρων ισχύουν και για τα στοιχεία του υποσυνόλου U, άρα το U είναι υπόχωρος του V.

Αντίστροφα, αν το U είναι υπόχωρος του V, τότε ικανοποιούνται οι παραπάνω δύο συνθήκες της κλειστότητας.

Πρόταση

Έστω U ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Το U είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν

$$\boxed{\lambda \mathbf{u} + \kappa \mathbf{v} \in U, \quad \text{για κάθε } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \ \ \lambda, \kappa \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}.}$$

Απόδειξη.

Ναι. □

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τα υποσύνολα

$$U = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : \ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \right\}$$

και

$$W = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : \ u_1 + u_2 + u_3 = 1 \right\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

Για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in U$ και $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, το διάνυσμα

$$\lambda\mathbf{u}+\kappa\mathbf{v}=\lambda(u_1,u_2,u_3)+\kappa(v_1,v_2,v_3)=(\lambda u_1+\kappa v_1,\lambda u_2+\kappa v_2,\lambda u_3+\kappa v_3)$$

ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(\lambda u_1+\kappa v_1)+(\lambda u_2+\kappa v_2)+(\lambda u_3+\kappa v_3) = \lambda(u_1+u_2+u_3)+\kappa(v_1+v_2+v_3) = 0$$

και ανήκει στο U. Επομένως, το U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Αντίθετα, το W δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και δύο υπόχωροί του, U και W. Η **τομή** των U και W είναι το σύνολο

$$U \cap W = \{\mathbf{v} \in V : \ \mathbf{v} \in U \text{ και } \mathbf{v} \in W\}$$

και το **άθροισμα** των U και W είναι το σύνολο

$$U + W = \{\mathbf{v} \in V : \ \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \ \mathbf{u} \in U \text{ και } \mathbf{w} \in W\}.$$

Αν $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, τότε το άθροισμα $U + W$ ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** των U και W και συμβολίζεται με $U \oplus W$. Στην περίπτωση αυτή, ο W ονομάζεται **συμπλήρωμα** του U (φυσικά και ο U είναι συμπλήρωμα του W).

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και δύο υπόχωροί του, U και W. Η τομή $U \cap W$ και το άθροισμα $U + W$ είναι επίσης υπόχωροι του V.

Απόδειξη.

Ναι. $\square$

Άσκηση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και δύο υπόχωροί του, U και W. Να αποδείξετε ότι η **ένωση**

$$U \cup W = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \in U \text{ ή } \mathbf{v} \in W\}$$

είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν $U \leq W$ ή $W \leq U$.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η γενική λύση ενός $\mu \times \nu$ πραγματικού ομογενούς γραμμικού συστήματος $AX = \mathbb{O}$ είναι διανυσματικός χώρος.

Ο διανυσματικός χώρος $\left\{X \in \mathbb{R}^{\nu\times 1} : AX = \mathbb{O}\right\}$ ονομάζεται **πυρήνας** του πίνακα A και συμβολίζεται με $\operatorname{Ker}(A)$.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$. Για οποιαδήποτε επιλογή αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, το διάνυσμα $\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}_k \in V$ ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$, το οποίο γράφουμε

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k] = \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}_k \in V : \ \lambda_i\},$$

ονομάζεται **γραμμική θήκη** των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$. Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ που παράγουν τη γραμμική θήκη $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k]$ ονομάζονται **γεννήτορες** της θήκης.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $(1,2,1), (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$, τότε η γραμμική θήκη τους είναι

$$\begin{aligned}
[(1,2,1),(0,1,1)] &= \left\{\lambda(1,2,1) + \kappa(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 : \ \lambda, \kappa \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(\lambda, 2\lambda + \kappa, \lambda + \kappa) \in \mathbb{R}^3 : \ \lambda, \kappa \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(\lambda, \lambda + (\lambda + \kappa), \lambda + \kappa) \in \mathbb{R}^3 : \ \lambda, \kappa \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = x + z\right\}.
\end{aligned}$$

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$. Η γραμμική θήκη $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k]$ είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη.

Ναι. □

Άσκηση

Να γράψετε ως γραμμικές θήκες τα σύνολα

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0\}$$

και

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y + w = 0, \ z = 2x\}$$

και την τομή τους.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι, για ένα $\mu \times \nu$ πραγματικό πίνακα A, το σύνολο $U = \left\{AX \in \mathbb{R}^{\mu\times 1} : \ X \in \mathbb{R}^{\nu\times 1}\right\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{\mu\times 1}$.

Ο διανυσματικός χώρος $U = \left\{AX \in \mathbb{R}^{\mu\times 1} : \ X \in \mathbb{R}^{\nu\times 1}\right\}$ ονομάζεται **εικόνα** του A και συμβολίζεται με $\mathrm{Image}(A)$.

Για μία γραμμική θήκη, προκύπτει το ερώτημα αν όλοι οι γεννήτορές της είναι απαραίτητοι για την δημιουργία της ή αν κάποιοι από αυτούς δεν χρειάζονται. Για παράδειγμα, στη γραμμική θήκη $[(1,1,2),(1,3,-2),(1,-1,6)]$, το 3ο διάνυσμα γράφεται $(1,-1,6) = 2(1,1,2) - (1,3,-2)$, άρα

$$\begin{aligned}
& [(1,1,2),(1,3,-2),(1,-1,6)] \\
= \ & \{\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(1,3,-2) + \lambda_3(1,-1,6) : \ \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\
= \ & \{\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(1,3,-2) + \lambda_3[2(1,1,2) - (1,3,-2)] : \ \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\
= \ & \{(\lambda_1 + 2\lambda_3)(1,1,2) + (\lambda_2 - \lambda_3)(1,3,-2) : \ \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\
= \ & \{(\mu_1(1,1,2) + \mu_2(1,3,-2) : \ \mu_i \in \mathbb{R}\} \\
= \ & [(1,1,2),(1,3,-2)] \, .
\end{aligned}$$

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$. Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ καλούνται **γραμμικά εξαρτημένα** αν κάποιο από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Αντίθετα, όταν κανένα από τα διανύσματα δεν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ καλούνται **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και μη μηδενικά $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$. Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη:

$$\boxed{\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.}$$

Απόδειξη.

Όχι. □

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι, στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\nu$, *τα διανύσματα*

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_\nu = (0, 0, \ldots, 1)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι, στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$, *τα διανύσματα*

$$(1, 0, 1, 1), \quad (2, 1, 0, 3), \quad (-1, 1, 1, -2)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόταση

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^\nu$ και μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu \in \mathbb{R}^\nu$. Θεωρούμε το $\nu \times \nu$ πίνακα A που έχει γραμμές τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu$. Τότε τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $|A| \neq 0$.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Πρόταση

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^\nu$ και μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\mu \in \mathbb{R}^\nu$ $(\mu \leq \nu)$. Αν τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\mu$ είναι σε κλιμακωτή μορφή (δηλαδή, ο πίνακας A που τα έχει ως γραμμές είναι κλιμακωτός), τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^\nu$ και μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\mu \in \mathbb{R}^\nu$. Ας υποθέσουμε ότι μετασχηματίζουμε με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss τον πίνακα $A = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \hline \mathbf{u}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{u}_\nu \end{array}\right]$ σε έναν πίνακα $\hat{A} = \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \hline \hat{\mathbf{u}}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{\mathbf{u}}_\nu \end{array}\right]$ κλιμακωτής μορφής, με $k \leq \mu$ μηδενικές γραμμές.

Τότε οι $\mu - k$ μη μηδενικές γραμμές του $\hat{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα σε κλιμακωτή μορφή βάσει της προηγούμενης πρότασης. Λαμβάνοντας υπόψη πιθανές εναλλαγές γραμμών που πραγματοποιήθηκαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής Gauss, οι γραμμές του A που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές γραμμές του $\hat{A}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Οι (τελευταίες) k μηδενικές γραμμές του $\hat{A}$ αντιστοιχούν σε k διανύσματα από τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\mu$ που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των υπολοίπων.

Στη διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως, ο αριθμός $\mu - k$ ισούται με

- το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του $\hat{A}$,
- το πλήθος των οδηγών στοιχείων του $\hat{A}$,
- το πλήθος των γραμμικά ανεξαρτήτων στηλών του $\hat{A}$,
- το πλήθος των γραμμικά ανεξαρτήτων γραμμών του A,
- το πλήθος των γραμμικά ανεξαρτήτων στηλών του A,

ονομάζεται **βαθμός** του πίνακα A (και του $\hat{A}$) και συμβολίζεται με $\mathrm{rank}(A)$.

Άσκηση

Εξετάστε ποια από τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 3, 4, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (-2, 0, 2, 4, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (3, 3, 2, -1, 3)$ *και* $\mathbf{u}_5 = (2, 6, 8, 6, 8)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Έστω ένας διανυσματικός χώρος $V \neq \{\mathbf{0}\}$ και $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ ένα σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων του V. Το σύνολο αυτό ονομάζεται **βάση** του V αν

(α) τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα,

(β) τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu$ παράγουν τον V, δηλαδή $V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu]$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\nu$ και τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots, \mathbf{e}_\nu = (0, 0, \ldots, 1)$. Έχουμε ήδη δει ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης, κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ γράφεται

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_\nu) = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_\nu\mathbf{e}_\nu.$$

Επομένως, το σύνολο $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_\nu\}$ είναι μία βάση του $\mathbb{R}^\nu$. Η βάση αυτή ονομάζεται **κανονική βάση** του $\mathbb{R}^\nu$.

Ως 2ο παράδειγμα, θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο των $\mu \times \nu$ (πραγματικών) πινάκων $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \mu$ και $j = 1, 2, \ldots, \nu$, θεωρούμε τον πίνακα $E_{i,j}$ που έχει το (i, j)-στοιχείο του ίσο με 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του μηδενικά. Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι οι πίνακες $E_{i,j}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu,\ j = 1, 2, \ldots, \nu)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και παράγουν τον $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$. Επομένως, το σύνολο $\{E_{i,j} : i = 1, 2, \ldots, \mu,\ j = 1, 2, \ldots, \nu\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^{\mu\times\nu}$.

Θεώρημα

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu \in V$. Το σύνολο $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ είναι βάση του V αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu \in V$.

Απόδειξη.

Όχι. □

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V *και δύο βάσεις του,* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ *και* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\mu\}$. *Τότε* $\nu = \mu$, *δηλαδή οι βάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.*

Απόδειξη.

Όχι. □

Αν ένας διανυσματικός χώρος V $(\neq \{\mathbf{0}\})$ έχει μία βάση με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ν, τότε κάθε βάση του V έχει το ίδιο ακριβώς πλήθος στοιχείων. Ο αριθμός ν ονομάζεται **διάσταση** του V και συμβολίζεται με $\dim(V)$. Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα, είδαμε ότι $\dim(\mathbb{R}^\nu) = \nu$ και $\dim(\mathbb{R}^{\mu\times\nu}) = \mu\,\nu$.

Θεώρημα (Θεώρημα Επέκτασης)

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V *διάστασης* ν. *Τότε, για κάθε σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\mu\}$ *του* V, *με* $\mu < \nu$, *υπάρχουν* $\nu - \mu$ *διανύσματα* $\mathbf{u}_{\mu+1}, \mathbf{u}_{\mu+2}, \ldots, \mathbf{u}_\nu$ *τέτοια ώστε το σύνολο* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\mu, \mathbf{u}_{\mu+1}, \mathbf{u}_{\mu+2}, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ *να είναι βάση του* V. *Δηλαδή, κάθε σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του* V *μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του* V.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V διάστασης ν. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) *Οποιαδήποτε $k > \nu$ διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

(β) *Αν k διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $k \leq \nu$.*

(γ) *Αν k διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ παράγουν τον V, τότε $k \geq \nu$.*

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V διάστασης ν και μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu \in V$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Το σύνολο $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ είναι βάση του V.*

(β) *Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu$ παράγουν τον V.*

(γ) *Τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V διάστασης ν κι ένας υπόχωρος U του V. Αν $\dim(U) = \nu$, τότε $U = V$.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Θεώρημα (Θεώρημα Διαστάσεων)

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και δύο υπόχωροί του, U και W. Τότε ισχύει η ισότητα

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).}$$

Απόδειξη.

Όχι. ☐

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V και δύο υπόχωροί του, U και W, με $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Τότε ισχύει η ισότητα

$$\boxed{\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W).}$$

Απόδειξη.

Όχι. ☐

Άσκηση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V διάστασης $\dim(V) = \nu$ κι ένας υπόχωρος U του V, διάστασης $\dim(U) = k < \nu$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει υπόχωρος W του V τέτοιος ώστε $V = U \oplus W$.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι τα ζεύγη $\{(1,2,3),(2,-1,1)\}$ και $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ είναι βάσεις του ίδιου υποχώρου του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση

Έστω τα σύνολα $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$ *και* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2z\}$. *Να αποδείξετε ότι είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^3$ *και θα βρείτε από μία βάση για καθένα από τους διανυσματικούς χώρους* U, W, $U + W$ *και* $U \cap W$.

Άσκηση

Έστω το σύστημα $(\Sigma)\begin{cases} 2x - 3y + z - w = \alpha \\ x + y + z + w = \beta \\ x + 6y + 2z + 4w = \gamma \\ 5x + 10y + 6z + 8w = \delta \end{cases}$, *όπου* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. *Να αποδείξετε ότι το σύνολο* $U = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 :$ *το* (Σ) *είναι συμβιβαστό*$\}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{R}^4$ *και να βρείτε μία βάση του.*

Χαρακτηριστικά Ποσά

Τα χαρακτηριστικά ποσά (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) των πινάκων παίζουν καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση και αντιμετώπιση προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων, συστημάτων ελέγχου, μηχανικών συστημάτων, ηλεκτρικών κυκλωμάτων, μηχανικής μάθησης, μοντέλων Οικονομίας, Βιολογίας και Οικολογίας, και πολλών άλλων.

Σε πολλές εφαρμογές που μοντελοποιούνται μέσω τετραγωνικών πινάκων, εμφανίζεται η ανάγκη υπολογισμού των μη μηδενικών διανυσμάτων που δεν αλλάζουν διεύθυνση όταν δράσει πάνω τους ένας συγκεκριμένος τετραγωνικός πίνακας. Δηλαδή, για ένα $\nu \times \nu$ πίνακα $A = [a_{i,j}]$, θέλουμε τα μη μηδενικά διανύσματα-στήλες $\mathbf{x}$ για τα οποία τα $\mathbf{x}$ και $A\mathbf{x}$ είναι συγγραμμικά. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να βρούμε όλα τα μη μηδενικά διανύσματα-στήλες $\mathbf{x}$ για τα οποία υπάρχουν αριθμοί λ τέτοιοι ώστε

$$\boxed{A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad (A - \lambda I_\nu)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}).}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **ιδιοπρόβλημα** του πίνακα A. Αν ένας αριθμός λ κι ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ την ικανοποιούν, τότε ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του A και το διάνυσμα-στήλη $\mathbf{x}$ ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** του A.

Για παράδειγμα, το ιδιοπρόβλημα του $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ είναι

$$(A - \lambda I_2)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x & +2y = 0 \\ & (3-\lambda)y = 0 \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα $|A - \lambda I_2| = (1-\lambda)(3-\lambda)$ και διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν $\lambda \neq 1, 3$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική διότι $|A| \neq 0$, και ο λ δεν είναι ιδιοτιμή του A.
- Αν $\lambda = 1$, τότε το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 2y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ κι έχει γενική λύση

  $$V_A = \{(x, y) = (x, 0) = x(1, 0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0)]\,.$$

  Αυτό σημαίνει ότι κάθε μη μηδενικό διάνυσμα-στήλη $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$.

- Αν $\lambda = 3$, τότε το σύστημα γράφεται $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ κι έχει γενική λύση

$$U_A = \{(x, y) = (x, x) = x(1, 1) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)].$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε μη μηδενικό διάνυσμα-στήλη $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$.

Γενικά, για ένα $\nu \times \nu$ πίνακα A, το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} (a_{1,1} - \lambda)x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,\nu}x_\nu = 0 \\ a_{2,1}x_1 + (a_{2,2} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2,\nu}x_\nu = 0 \\ \vdots \\ a_{\nu,1}x_1 + a_{\nu,2}x_2 + \cdots + (a_{\nu,\nu} - \lambda)x_\nu = 0 \end{cases}$$

έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν η ορίζουσα

$$\det(A-\lambda I_\nu)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu,1} & a_{\nu,2} & \cdots & a_{\nu,\nu}-\lambda \end{vmatrix}$$

είναι μηδενική. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε τις μη μηδενικές λύσεις του ιδιοπροβλήματος, πρέπει πρώτα να βρούμε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ μηδενίζεται η ορίζουσα $|A-\lambda I_\nu|$, ή ισοδύναμα, η ορίζουσα $|\lambda I_\nu - A|$ $=(-1)^\nu \det(A-\lambda I_\nu)$. Επιλέγουμε να επιλύσουμε την εξίσωση

$$\boxed{|\lambda I_\nu - A| = 0,}$$

η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του A.

Η ορίζουσα $|\lambda I_\nu - A|$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς λ βαθμού ν, του οποίου οι συντελεστές είναι συναρτήσεις των στοιχείων του A και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του είναι ίσος με 1. Το πολυώνυμο αυτό είναι

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = |\lambda I_\nu - A| = \lambda^\nu + a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A και, σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, έχει ν ακριβώς μιγαδικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$, λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητές τους. Επιπλέον, από τους γνωστούς τύπους Vieta, καταλήγουμε στις ενδιαφέρουσες ισότητες:

$$\boxed{|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_\nu \ \text{ και } \ \mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu.}$$

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μία ιδιοτιμή λ_0 ενός $\nu \times \nu$ πίνακα A και θέλουμε να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στη λ_0. Επιλύοντας το ιδιοπρόβλημα $(A - \lambda_0 I_\nu)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, υπολογίζουμε τον διανυσματικό χώρο

$$\boxed{V_A(\lambda_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^\nu : \ (A - \lambda_0 I_\nu)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I_\nu)\,,}$$

ο οποίος ονομάζεται **ιδιόχωρος** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0. Τα μη μηδενικά διανύσματα του $V_A(\lambda_0)$ είναι ακριβώς τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0. Αν το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ είναι μία βάση του $V_A(\lambda_0)$, τότε τα διανύσματα-στήλες $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots,$ $\mathbf{x}_k$ τα ονομάζουμε **ιδιοδιανύσματα-αντιπροσώπους** του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0. Η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_0 ως ρίζα του $\chi_A(\lambda)$ ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της λ_0 και συμβολίζεται με $\mathrm{am}_A(\lambda_0)$. Η διάσταση $\dim(V_A(\lambda_0)) = k$ του $V_A(\lambda_0)$ ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της λ_0, συμβολίζεται με $\mathrm{gm}_A(\lambda_0)$ και είναι πάντα μικρότερη ή ίση της $\mathrm{am}_A(\lambda_0)$.

Άσκηση

Βρείτε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και τις αντίστοιχες πολλαπλότητες των ιδιοτιμών, του $A = \begin{bmatrix} 14 & 15 & -15 \\ 0 & 4 & 0 \\ 10 & 15 & -11 \end{bmatrix}$.

Άσκηση

Βρείτε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα και τις αντίστοιχες πολλαπλότητες των ιδιοτιμών, του $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Άσκηση

Βρείτε τον $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & e & f \end{bmatrix}$ *αν έχει ιδιοδιανύσματα τα*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ \textit{και} \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Πρόταση

Αν ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A είναι τριγωνικός, τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς τα διαγώνια στοιχεία του.

Απόδειξη.

Ναι. ☐

Πρόταση

Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A, μία ιδιοτιμή λ_0 του A κι ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_0$ του A που αντιστοιχεί στη λ_0.

(α) *Για κάθε $k = 2, 3, \ldots,$ ο A^k έχει ιδιοτιμή την λ_0^k με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_0$.*

(β) *Για κάθε πολυώνυμο $p(t) = \alpha_k t^k + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$, ο πίνακας $p(A) = \alpha_k A^k + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_\nu$ έχει ιδιοτιμή την $p(\lambda_0)$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_0$.*

(γ) *Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A^{-1} έχει ιδιοτιμή την λ_0^{-1} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_0$.*

Απόδειξη.

Ναι. ☐

Δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A και B ονομάζονται **όμοιοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας M τέτοιος ώστε $A = MBM^{-1}$.

Πρόταση

Δύο $\nu \times \nu$ όμοιοι πίνακες A και B έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές πολλαπλότητες και τις ίδιες γεωμετρικές πολλαπλότητες.

Απόδειξη.

Ναι. □

Παρά το γεγονός ότι στο γινόμενο δύο $\nu \times \nu$ πινάκων A και B δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα, τα φάσματα των γινομένων AB και BA ταυτίζονται.

Πρόταση

Έστω δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A και B. Οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές πολλαπλότητες.

Απόδειξη.

Ναι (για την περίπτωση που A ή B αντιστρέψιμος). □

Πρόταση

Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A. Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ που αντιστοιχούν σε k διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Θεώρημα

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός $\nu \times \nu$ πίνακα A. Αν για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, ο ιδιόχωρος $V_A(\lambda_i)$ της ιδιοτιμής λ_i έχει μία βάση $\{\mathbf{x}_{i,1}, \mathbf{x}_{i,2}, \ldots, \mathbf{x}_{i,k_i}\}$, τότε τα ιδιοδιανύσματα

$$\mathbf{x}_{1,1},\ \mathbf{x}_{1,2},\ \ldots,\ \mathbf{x}_{1,k_1},\ \mathbf{x}_{2,1},\ \ldots,\ \mathbf{x}_{2,k_2},\ \ldots,\ \mathbf{x}_{n,1},\ \ldots,\ \mathbf{x}_{n,k_n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Άσκηση

Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, *ο πίνακας* $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *έχει τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα;*

Άσκηση

Έστω δύο $\nu \times \nu$ *πίνακες* A *και* B *τέτοιοι ώστε* $AB = BA$. *Αν* λ_0 *είναι μία απλή ιδιοτιμή του* A *και* $\mathbf{x}_0$ *είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του* A *που αντιστοιχεί στη* λ_0, *τότε να αποδείξετε ότι το* $\mathbf{x}_0$ *είναι ιδιοδιάνυσμα και του* B.

Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας $A = [a_{i,j}]$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\nu$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, έχουμε

$$\begin{cases} A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \\ A\mathbf{x}_2 = \lambda_1 \mathbf{x}_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ A\mathbf{x}_\nu = \lambda_\nu \mathbf{x}_\nu \end{cases} \Leftrightarrow \left[A\mathbf{x}_1 \,\middle|\, A\mathbf{x}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A\mathbf{x}_\nu \right] = \left[\lambda_1\mathbf{x}_1 \,\middle|\, \lambda_2\mathbf{x}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \lambda_\nu\mathbf{x}_\nu \right]$$

$$\Leftrightarrow A \left[\mathbf{x}_1 \,\middle|\, \mathbf{x}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \mathbf{x}_\nu \right] = \left[\mathbf{x}_1 \,\middle|\, \mathbf{x}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \mathbf{x}_\nu \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\nu \end{bmatrix}.$$

Αν θεωρήσουμε το $\nu \times \nu$ διαγώνιο πίνακα $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu\}$ και το $\nu \times \nu$ πίνακα $M = \left[\mathbf{x}_1 \,\middle|\, \mathbf{x}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \mathbf{x}_\nu \right]$,

τότε ο M είναι αντιστρέψιμος και

$$\boxed{AM = MD \;\Leftrightarrow\; A = MDM^{-1}.}$$

Η τελευταία σχέση είναι μία σχέση ομοιότητας μεταξύ του πίνακα A και του διαγώνιου πίνακα D, και ονομάζεται **διαγωνοποίηση** του A (μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας). Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας A ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** (μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας). Επιπλέον, η διαγωνοποίηση γράφεται

$$\boxed{A = \left[\mathbf{x}_1 \,\middle|\, \mathbf{x}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \mathbf{x}_\nu \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\nu \end{bmatrix} \left[\mathbf{x}_1 \,\middle|\, \mathbf{x}_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \mathbf{x}_\nu \right]^{-1},}$$

η οποία μας προσφέρει πλήρη πληροφορία για ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, αλγεβρικές πολλαπλότητες, γεωμετρικές πολλαπλότητες, ορίζουσα και ίχνος.

Θεώρημα

Ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει ν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Πρόταση

Για κάθε ιδιοτιμή ενός τυχαίου τετραγωνικού πίνακα, η αλγεβρική πολλαπλότητά της είναι μεγαλύτερη ή ίση της γεωμετρικής πολλαπλότητάς της.

Απόδειξη.

Όχι. □

Πρόταση

Ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν η αλγεβρική πολλαπλότητα και η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του ταυτίζονται.

Απόδειξη.

Όχι. □

Παρατήρηση

Αν ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A έχει ν απλές ιδιοτιμές, τότε είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση

Έστω δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A και B τέτοιοι ώστε $AB = BA$. Να αποδείξετε ότι, αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι απλές, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας M τέτοιος ώστε οι πίνακες $M^{-1}AM$ και $M^{-1}BM$ να είναι διαγώνιοι.

Άσκηση

Να κατασκευάσετε μία διαγωνοποίηση του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 36 & 18 \\ -9 & 26 & 9 \\ 9 & -18 & -1 \end{bmatrix}.$$

Έπειτα, βρείτε έναν 3×3 πίνακα X τέτοιον ώστε $X^3 = A$.

Άσκηση

Να κατασκευάσετε μία διαγωνοποίηση του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -12 & 7 & 12 \\ 6 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

και να αποδείξετε ότι $A^{2025} + A^{2024} - A = I_3$.

Άσκηση

Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ *για την οποία ο πίνακας*

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3-\alpha & \alpha-2 \\ 1 & 2-\alpha & \alpha-1 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα, για την τιμή του α *που θα βρείτε, κατασκευάστε μία διαγωνοποίηση του* $A(\alpha)$.

Θεώρημα (Θεώρημα Cayley-Hamilton)

Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = \lambda^\nu + a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. Τότε ισχύει

$$\boxed{\chi_A(A) = A^\nu + a_{\nu-1}A^{\nu-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A + a_0I_\nu = \mathbb{O}.}$$

Απόδειξη.

Όχι. □

Για οποιοδήποτε πολυώνυμο $p(\lambda)$ βαθμού $m \geq \nu$, ισχύει η διαίρεση $p(\lambda) = \chi_A(\lambda)\pi(\lambda) + \upsilon(\lambda)$, όπου το πολυώνυμο $\pi(\lambda)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης και το πολυώνυμο $\upsilon(\lambda)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης με βαθμό μικρότερο ή ίσο του $\nu - 1$. Επειδή, για την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων, όλες οι δυνάμεις του A αντιμετατίθενται μεταξύ τους και με το μοναδιαίο πίνακα, προκύπτει ότι

$$p(A) = \chi_A(A)\pi(A) + \upsilon(A) = \upsilon(A).$$

Παρατήρηση

Έστω ότι ο πίνακας A *έχει* k *διακεκριμένες ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *και το υπόλοιπο στην παραπάνω διαίρεση είναι* $\upsilon(\lambda) = \gamma_{\nu-1}\lambda^{\nu-1} + \gamma_{\nu-2}\lambda^{\nu-2} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$. *Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}$ *αν για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, k$, *θεωρήσουμε τις* $\xi_i = \mathrm{am}_A(\lambda_i)$ *ισότητες:*

$$\begin{cases} p(\lambda_i) = \chi_A(\lambda_i)\pi(\lambda_i) + \upsilon(\lambda_i) \\ p'(\lambda_i) = (\chi_A(\lambda_i)\pi(\lambda_i) + \upsilon(\lambda_i))' \\ p''(\lambda_i) = (\chi_A(\lambda_i)\pi(\lambda_i) + \upsilon(\lambda_i))'' \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ p^{(\xi_i-1)}(\lambda_i) = (\chi_A(\lambda_i)\pi(\lambda_i) + \upsilon(\lambda_i))^{(\xi_i-1)} \end{cases} .$$

Οι συνολικά $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k = \nu$ *τέτοιες ισότητες σχηματίζουν ένα* $\nu \times \nu$ *γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}$, *το οποίο επιλύεται κατά τα γνωστά.*

Άσκηση

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Να υπολογίσετε τον πίνακα* $A^{2025} - A^{2024}$.

Άσκηση

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. *Να υπολογίσετε τους πίνακες* A^{-1} *και* A^{200}.

Για ένα $\nu \times \nu$ πίνακα A, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο $\Pi(A)$ όλων των μη μηδενικών πολυωνύμων που μηδενίζονται από τον A. Το σύνολο αυτό προφανώς περιέχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$ του A και είναι μη κενό. Μεταξύ των στοιχείων του $\Pi(A)$, υπάρχει ένα μη μηδενικό πολυώνυμο ελάχιστου δυνατού βαθμού μ. Διαιρώντας αυτό το πολυώνυμο με το μεγιστοβάθμιο συντελεστή του, λαμβάνουμε ένα πολυώνυμο της μορφής

$$\boxed{m_A(\lambda) = \lambda^{\mu} + b_{\mu-1}\lambda^{\mu-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0,}$$

το οποίο ονομάζεται **ελάχιστο πολυώνυμο** του πίνακα A.

Πρόταση

Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A και το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) *Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ που ικανοποιεί τη σχέση $p(A) = \mathbb{O}$, διαιρείται ακριβώς από το $m_A(\lambda)$.*

(β) *Το $m_A(\lambda)$ είναι το μοναδικό μη μηδενικό πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού που μηδενίζεται από τον A κι έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1.*

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Πρόταση

Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A. Κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου $m_A(\lambda)$.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Πρόταση

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι διακεκριμενες ιδιοτιμές ενός $\nu \times \nu$ πίνακα A, με αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες $\xi_i = \mathrm{am}_A(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A γράφεται

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\xi_1} (\lambda - \lambda_2)^{\xi_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\xi_k} \quad (\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k = \nu)}$$

και το ελάχιστο πολυώνυμο του A γράφεται

$$\boxed{m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} (\lambda - \lambda_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{s_k} \quad (1 \leq s_i \leq \xi_i).}$$

Απόδειξη.

Όχι. □

Θεώρημα

Ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας αν και μόνο αν όλες οι ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου $m_A(\lambda)$ είναι απλές.

Απόδειξη.

Όχι. □

Άσκηση

Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση

Τι συμπεραίνετε για έναν πίνακα A *αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι* $\chi_A(\lambda) = (\lambda+3)^2(\lambda-2)(\lambda-4)^2$;

Άσκηση

Να εξετάσετε αν ο $\nu \times \nu$ *πίνακας* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{bmatrix}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος (με μετασχηματισμό ομοιότητας).*

Άσκηση

Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ *για την οποία ο πίνακας* $A(\alpha) = \begin{bmatrix} -\alpha+4 & 0 & \alpha-3 \\ 14 & 8 & -14 \\ -\alpha+3 & 0 & \alpha-2 \end{bmatrix}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος (με μετασχηματισμό ομοιότητας). Έπειτα, για την τιμή του* α *που θα βρείτε, κατασκευάστε έναν* 3×3 *πίνακα* X *τέτοιον ώστε* $X^3 = A(\alpha)$.

Άσκηση

Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $w \in \mathbb{R}$, *για την οποία ο πίνακας* $A(w) = \begin{bmatrix} 6-w & w-5 & w-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2-w & w-3 & w+1 \end{bmatrix}$ *είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα, για την τιμή του* w *που θα βρείτε, κατασκευάστε μία διαγωνοποίηση του* $A(w)$.

Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας του Χώρου

Η Γραμμική Άλγεβρα, μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα, αναπτύχθηκε σε στενή σύνδεση με την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου και του χώρου. Σήμερα, η σχέση των δύο επιστημονικών περιοχών έχει ενισχυθεί κυρίως λόγω της χρήσης πινάκων και γραμμικών μετασχηματισμών κατά την επεξεργασία γραφικών με χρήση Η/Υ και των σημαντικών εφαρμογών που η επεξεργασία αυτή έχει.

Το σημειακό τρισδιάστατο χώρο που αντιλαμβανόμαστε στην καθημερινή μας ζωή τον συμβολίζουμε με $\mathbb{E}$ και τον ονομάζουμε **ευκλείδειο χώρο**. Για δύο σημεία A και B του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{E}$, το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με **φορά** από το A προς το B ονομάζεται **γεωμετρικό διάνυσμα** $\overrightarrow{AB}$ με **αρχή** A και **πέρας** B.

Δύο γεωμετρικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ ονομάζονται

- **συγγραμμικά** αν ανήκουν σε παράλληλες ευθείες, δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση, το οποίο συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{CD}$,
- **ομόρροπα** αν είναι συγγραμμικά κι έχουν την ίδια φορά, το οποίο συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$,
- **αντίρροπα** αν είναι συγγραμμικά κι έχουν αντίθετη φορά, το οποίο συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$,
- **ίσα** αν είναι ομόρροπα κι έχουν ίσα μήκη, το οποίο συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$,
- **αντίθετα** αν είναι αντίρροπα κι έχουν ίσα μήκη, το οποίο συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.

Ελεύθερο διάνυσμα ονομάζεται ένα άπειρο σύνολο γεωμετρικών διανυσμάτων τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους κι έχουν ως αρχικά σημεία όλα τα σημεία του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{E}$. Κάθε γεωμετρικό διάνυσμα που ανήκει σε αυτό το άπειρο σύνολο ονομάζεται **γεωμετρικός αντιπρόσωπος** του ελεύθερου διανύσματος. Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του $\mathbb{E}$ συμβολίζεται με $\mathbb{V}_3$.

Δύο ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$ ονομάζονται

- **συγγραμμικά** αν έχουν παράλληλους γεωμετρικούς αντιπροσώπους, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbf{u} \,||\, \mathbf{v}$,
- **ομόρροπα** αν έχουν ομόρροπους γεωμετρικούς αντιπροσώπους, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbf{u} \upuparrows \mathbf{v}$,
- **αντίρροπα** αν έχουν αντίρροπους γεωμετρικούς αντιπροσώπους, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbf{u} \uparrow\downarrow \mathbf{v}$,
- **ίσα** αν έχουν ίσους γεωμετρικούς αντιπροσώπους, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,
- **αντίθετα** αν έχουν αντίθετους γεωμετρικούς αντιπροσώπους, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.

Έστω δύο γεωμετρικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BC}$, όπου το πέρας το πρώτου διανύσματος ταυτίζεται με την αρχή του δεύτερου διανύσματος. Το γεωμετρικό διάνυσμα $\overrightarrow{AC}$ που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και πέρας το πέρας του δεύτερου διανύσματος ονομάζεται **διανυσματικό άθροισμα** των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BC}$, και γράφεται

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.}$$

Για το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$ που αντιπροσωπεύεται γεωμετρικά από το $\overrightarrow{AB}$, το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$ που αντιπροσωπεύεται γεωμετρικά από το $\overrightarrow{BC}$ και το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$ που αντιπροσωπεύεται γεωμετρικά από το $\overrightarrow{AC}$, έχουμε

$$\boxed{\mathbf{w} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{u} + \mathbf{v},}$$

και το $\mathbf{w}$ ονομάζεται **διανυσματικό άθροισμα** των ελεύθερων διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

Για ένα γεωμετρικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ κι ένα πραγματικό αριθμό λ, ορίζουμε το γεωμετρικό διάνυσμα $\overrightarrow{AC}$ ως εξής:

- Αν $\lambda = 0$, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA}$ είναι **μηδενικό**.
- Αν $\lambda > 0$, τότε $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ και $\|\overrightarrow{AC}\| = \lambda\|\overrightarrow{AB}\|$.
- Αν $\lambda < 0$, τότε $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$ και $\|\overrightarrow{AC}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{AB}\|$.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AC}$ ονομάζεται **βαθμωτό γινόμενο** του $\overrightarrow{AB}$ με τον αριθμό λ, και γράφεται

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}.}$$

Αν θεωρήσουμε το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ που αντιπροσωπεύεται από το $\overrightarrow{AB}$ και το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$ που αντιπροσωπεύεται από το $\overrightarrow{AC}$, τότε έχουμε

$$\boxed{\mathbf{w} = \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\mathbf{u}}$$

και το ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{w}$ ονομάζεται **βαθμωτό γινόμενο** του ελεύθερου διανύσματος $\mathbf{u}$ με τον αριθμό λ, Για ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$ και αριθμούς $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (**αντιμεταθετική**).
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (**προσεταιριστική**).
3. Για το **μηδενικό** ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{0}$, ισχύει $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$.
4. Για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$, υπάρχει ένα **αντίθετο** ελεύθερο διάνυσμα $-\mathbf{u}$, τέτοιο ώστε $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
5. $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ και $(\lambda + \kappa)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \kappa\mathbf{u}$ (**επιμεριστική**).
6. $(\lambda\kappa)\mathbf{u} = \lambda(\kappa\mathbf{u}) = \kappa(\lambda\mathbf{u})$.
7. $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$, για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$.

Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύονται άμεσα με γεωμετρικό τρόπο.

Πρόταση

Για το διανυσματικό χώρο $\mathbb{V}_3$, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) *Το μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{0}$ είναι μοναδικό.*

(β) *Το αντίθετο κάθε ελεύθερου διανύσματος $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$ είναι μοναδικό.*

(γ) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$.*

(δ) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, *για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(ε) $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$, *για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$.*

(στ) *Αν $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$, για κάποια $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ή $\lambda = 0$.*

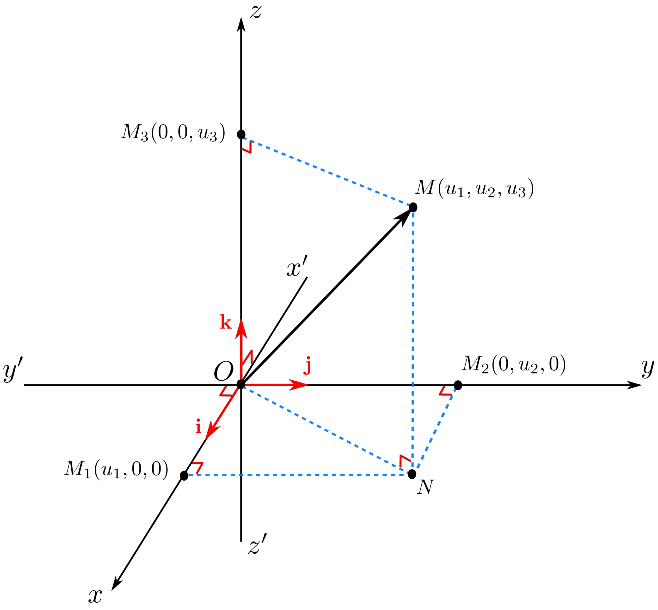
Απόδειξη.

Όχι (γνωστή από τους διανυσματικούς χώρους). □

Έστω δύο μη μηδενικά ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$ και δύο γεωμετρικά διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ και $\overrightarrow{AC} = \mathbf{v}$, με κοινή αρχή το σημείο A, που τα αντιπροσωπεύουν. Η προσανατολισμένη κυρτή γωνία που σχηματίζουν τα συνεπίπεδα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$ με φορά από το $\overrightarrow{AB}$ προς το $\overrightarrow{AC}$ ονομάζεται **γωνία** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, ή των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$, και συμβολίζεται με $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$.

Η γωνία δύο διανυσμάτων στον τρισδιάτατο χώρο $\mathbb{E}$ λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, έχει θετική φορά αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και αρνητική φορά όμοια με τους δείκτες του ρολογιού. Φυσικά, η γωνία μεταξύ συγγραμμικών διανυσμάτων είναι 0 ή $\pm\pi$.

Δύο ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$ ονομάζονται **ορθογώνια** ή **κάθετα** μεταξύ τους, αν $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \pm\dfrac{\pi}{2}$.



Σχήμα: Δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα αξόνων.

Σε ένα (δεξιόστροφο) καρτεσιανό σύστημα αξόνων $(O;\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}$, είναι φανερό ότι

$\mathbf{i} = 1\cdot\mathbf{i}+0\cdot\mathbf{j}+0\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{j} = 0\cdot\mathbf{i}+1\cdot\mathbf{j}+0\cdot\mathbf{k}$ και $\mathbf{k} = 0\cdot\mathbf{i}+0\cdot\mathbf{j}+1\cdot\mathbf{k}$,

κι έτσι, τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ γράφονται:

$$\mathbf{i} = (1,0,0),\ \ \mathbf{j} = (0,1,0)\ \text{ και }\ \mathbf{k} = (0,0,1).$$

Κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, ο γεωμετρικός του αντιπρόσωπος $\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}$ (με αρχικό σημείο το O) και το σημείο M γράφονται στη μορφή

$$\boxed{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)\,,\ \ \overrightarrow{OM} = (u_1, u_2, u_3)\ \text{ και }\ M = (u_1, u_2, u_3)\,.}$$

Στους άξονες $x'x$, $y'y$ και $z'z$, τα σημεία $M_1\,(u_1,0,0)$, $M_2\,(0,u_2,0)$ και $M_3\,(0,0,u_3)$ είναι οι αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές του σημείου $M\,(u_1,u_2,u_3)\,,$

Έστω δύο ελεύθερα διανύσματα

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = (v_1, v_2, v_3)$$

κι ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$. Με τη βοήθεια των συντεταγμένων, το άθροισμα των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ γράφεται

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) + (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \\ &= (u_1 + v_1)\,\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\,\mathbf{j} + (u_3 + v_3)\,\mathbf{k} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)\,, \end{aligned}}$$

η διαφορά των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ γράφεται

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) - (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \\ &= (u_1 - v_1)\,\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\,\mathbf{j} + (u_3 - v_3)\,\mathbf{k} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)\,, \end{aligned}}$$

και το βαθμωτό γινόμενο του $\mathbf{u}$ με τον λ γράφεται

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda\mathbf{u} &= \lambda\,(u_1, u_2, u_3) = \lambda\,(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \\ &= (\lambda u_1)\,\mathbf{i} + (\lambda u_2)\,\mathbf{j} + (\lambda u_3)\,\mathbf{k} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)\,. \end{aligned}}$$

Έστω δύο σημεία $A(x_A, y_A, z_A)$ και $B(x_B, y_B, z_B)$ στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}$ και τα διανύσματα θέσης τους $\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A, z_A)$ και $\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B, z_B)$. Τότε

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)\,.}$$

Επιπλέον, οποιοδήποτε σημείο M του ευθύγραμμου τμήματος $[AB]$ έχει διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, όπου $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ και $\|\overrightarrow{AM}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\|$. Προφανώς, υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $t_M \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $\overrightarrow{AM} = t_M \overrightarrow{AB}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + t_M \overrightarrow{AB} = (x_A, y_A, z_A) + t_M (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \\
&= (x_A, y_A, z_A) - t_M (x_A, y_A, z_A) + t_M (x_B, y_B, z_B) \\
&= ((1 - t_M) x_A + t_M x_B, (1 - t_M) y_A + t_M y_B, (1 - t_M) z_A + t_M z_B)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
M &= ((1 - t_M) x_A + t_M x_B, (1 - t_M) y_A + t_M y_B, (1 - t_M) z_A + t_M z_B) \\
&= (1 - t_M)(x_A, y_A, z_A) + t_M (x_B, y_B, z_B)\,.
\end{aligned}$$

Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα $[AB]$ γράφεται

$$\boxed{[AB] = \{(1-t)\,(x_A, y_A, z_A) + t\,(x_B, y_B, z_B) : \; t \in [0,1]\}\,,}$$

όπου για $t = 0$, λαμβάνουμε το σημείο $A\,(x_A, y_A, z_A)$ και για $t = 1$, λαμβάνουμε το σημείο $B\,(x_B, y_B, z_B)$.

Αν θέλουμε να βρούμε το σημείο $M\,(x_M, y_M, z_M)$ που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα $[AB]$ σε λόγο $\dfrac{(AM)}{(MB)} = \dfrac{\lambda}{\kappa}$, τότε έχουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + \dfrac{\kappa}{\lambda}\,\overrightarrow{AM} = \dfrac{\lambda+\kappa}{\lambda}\,\overrightarrow{AM}$, ή ισοδύναμα,

$$\boxed{M = (x_M, y_M, z_M) = \frac{\kappa}{\lambda+\kappa}\,(x_A, y_A, z_A) + \frac{\lambda}{\lambda+\kappa}\,(x_B, y_B, z_B)\,.}$$

Φυσικά, για $\lambda = \kappa = 1$, λαμβάνουμε το μέσο του $[AB]$:

$$\boxed{M = \frac{1}{2}\,(x_A, y_A, z_A) + \frac{1}{2}\,(x_B, y_B, z_B) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).}$$

Έστω δύο σημεία $A(x_A, y_A, z_A)$ και $B(x_B, y_B, z_B)$ στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}$. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το συμμετρικό σημείο $C(x_C, y_C, z_C)$ του A ως προς το B, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το B είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $[AC]$. Συνεπώς έχουμε

$$B = (x_B, y_B, z_B) = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + z_C}{2} \right),$$

ή ισοδύναμα,

$$x_A + x_C = 2x_B, \quad y_A + y_C = 2y_B \quad \text{και} \quad z_A + z_C = 2z_B,$$

ή ισοδύναμα,

$$\boxed{C = (x_C, y_C, z_C) = (2x_B - x_A, 2y_B - y_A, 2z_B - z_A).}$$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι τρία σημεία $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ *και* $C(x_C, y_C, z_C)$ *με* $x_C \neq x_A$, $y_C \neq y_A$ *και* $z_C \neq z_A$, *είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν*

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}.$$

Άσκηση

Έστω τρία μη συγγραμμικά σημεία $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ *και* $C(x_C, y_C, z_C)$. *Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαμέσων του τριγώνου* ABC.

Το **εσωτερικό γινόμενο** δύο ελεύθερων διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$ ορίζεται ως η ποσότητα

$$\boxed{\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, \cos\left(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}\right), & \text{αν } \mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ 0, & \text{αν } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ ή } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} .}$$

Ομοίως ορίζεται και το εσωτερικό γινόμενο δύο γεωμετρικών διανυσμάτων με κοινή αρχή.

Για κάθε ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$ και αριθμό λ, οι ακόλουθες ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό:

(α) $\mathbf{u} \circ \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$ (**μη αρνητικότητα**).

(β) $\mathbf{u} \circ \mathbf{u} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(γ) $(\lambda \mathbf{u}) \circ \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(δ) $\mathbf{u} \circ (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \circ \mathbf{v})$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ε) $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}$ (**συμμετρική**).

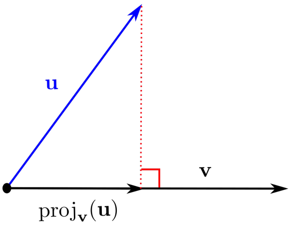
($\sigma\tau$) $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} \circ \mathbf{x} = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$.

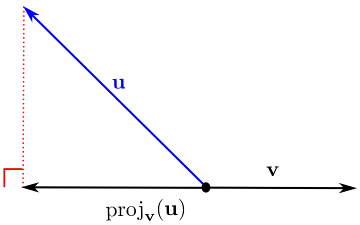
Αν θεωρήσουμε δύο μη μηδενικά ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, τότε το διάνυσμα

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\| \cos\left(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}\right) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|} \cos\left(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}\right) \right) \mathbf{v}$$

είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{u}$ επί του $\mathbf{v}$. Επιπλέον, είναι φανερό ότι

$$\boxed{\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \circ \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}).}$$





Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$, μπορούν να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(ζ) $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \circ \mathbf{w} = (\mathbf{u} \circ \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \circ \mathbf{w})$.

(η) $\mathbf{u} \circ (\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \circ \mathbf{w})$.

Για τα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, προφανώς ισχύει $\mathbf{i} \circ \mathbf{i} = \mathbf{j} \circ \mathbf{j} = \mathbf{k} \circ \mathbf{k} = 1$ και $\mathbf{i} \circ \mathbf{j} = \mathbf{i} \circ \mathbf{k}$ $= \mathbf{j} \circ \mathbf{k} = 0$.

Πρόταση

Έστω δύο ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Το εσωτερικό γινόμενό τους γράφεται

$$\boxed{\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \circ (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.}$$

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Άσκηση

Έστω ένα ημικύκλιο με διάμετρο AB κι ένα σημείο C επί του ημικυκλίου. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$ είναι ορθή.

Άσκηση

Έστω δύο μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ που σχηματίζουν γωνία $\left(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Βρείτε (με τη βοήθεια των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$) ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ που να ικανοποιεί την ισότητα $(\mathbf{u} \circ \mathbf{x})\mathbf{v} + 6\mathbf{u} = 4\mathbf{x}$.

Έστω δύο ελεύθερα διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Το **εξωτερικό γινόμενο** των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right),}$$

ή (απλούστερα) συμβολικά,

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.}$$

Αυτή η 3×3 "ορίζουσα" ικανοποιεί όλες τις γνωστές ιδιότητες των οριζουσών όταν στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών εφαρμόζονται στη δεύτερη και στην τρίτη γραμμή. Κατά συνέπεια, το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

Για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

(i) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(iii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

(iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

(v) $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = -\lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Πρόταση

Για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$, *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ \mathbf{w} = \mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$.

(β) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \circ \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \circ \mathbf{w})\mathbf{u}$ *και*
$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \circ \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \circ \mathbf{v})\mathbf{w}$.

(γ) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \circ \mathbf{v})^2$.

Απόδειξη.

Ναι.

Παρατήρηση

Από την τελευταία πρόταση, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ \mathbf{u} = 0$ *και* $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ \mathbf{v} = 0$, *κι επομένως,*

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \quad \textit{και} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}.}$$

- $\left\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\right\| = \left\|\mathbf{u}\right\| \left\|\mathbf{v}\right\| \sqrt{1 - \cos\left(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}\right)^2}$, *κι επομένως,*

$$\boxed{\left\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\right\| = \left\|\mathbf{u}\right\| \left\|\mathbf{v}\right\| \left|\sin\left(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}\right)\right|.}$$

- $\mathbf{u} \,||\, \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- *Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το μέτρο του εξωτερικού γινομένου των δύο μη παράλληλων πλευρών του.*

Επιπλέον, από την τελευταία πρόταση, ξεχωρίζουμε:

(α) Την ποσότητα

$$\boxed{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ \mathbf{w} = \mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},}$$

την οποία ονομάζουμε **μικτό γινόμενο** των διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$ και συμβολίζουμε με $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$.

(β) Τα διανύσματα

$$\boxed{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \circ \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \circ \mathbf{w})\mathbf{u}}$$

και

$$\boxed{\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \circ \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \circ \mathbf{v})\mathbf{w},}$$

τα οποία ονομάζουμε **διπλά εξωτερικά γινόμενα** των διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$.

Πρόταση

Για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}_3$, *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) $[\mathbf{u}+\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$.

(β) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{z}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{w}]$.

(γ) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}+\mathbf{z}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}]$.

(δ) $[\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{w}+\mathbf{u}] = 2[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$.

Απόδειξη.

Ναι. □

Παρατήρηση

Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *και* $\mathbf{w}$ *ισούται με*

$$\textit{εμβαδό βάσης} \cdot \textit{ύψος} = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| \cdot \frac{|[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]|}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} = |[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]| .$$

Άσκηση

Με χρήση του εξωτερικού γινομένου, να αποδείξετε το νόμο των ημιτόνων.

Άσκηση

Έστω τα σημεία $A(-1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $C(1,-1,1)$ *και* $D(3,5,6)$, *και τα διανύσματα* $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ *και* $\mathbf{w} = \overrightarrow{AD}$. *Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα* $\mathbf{u}$ *και* $\mathbf{v}$, *και τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *και* $\mathbf{w}$.

Άσκηση

Έστω τρία διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$ *τέτοια ώστε* $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} \neq 0$ *και* $\mathbf{u} \circ \mathbf{w} = 0$, *κι ένας αριθμός* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Βρείτε (με τη βοήθεια των* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *και* λ*) ένα διάνυσμα* $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$ *τέτοιο ώστε* $\mathbf{u} \times \mathbf{x} = \mathbf{w}$ *και* $\mathbf{v} \circ \mathbf{x} = \lambda$.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε μία ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon}$ για την οποία γνωρίζουμε ένα σημείο $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ από το οποίο διέρχεται κι ένα διάνυσμα $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq \mathbf{0}$ που είναι παράλληλό της (**διάνυσμα διεύθυνσης**). Τότε, ένα οποιοδήποτε σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στην ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon}$ αν και μόνο αν $\overrightarrow{P_0P} \,||\, \mathbf{a}$, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν υπάρχει αριθμός $t \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{a} \quad &\Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t\,(\alpha, \beta, \gamma) \\ &\Leftrightarrow \quad x - x_0 = t\alpha, \quad y - y_0 = t\beta, \quad z - z_0 = t\gamma. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ένα σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στην $\boldsymbol{\varepsilon}$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{array} \right. \qquad (t \in \mathbb{R}),}$$

οι οποίες ονομάζονται **παραμετρικές εξισώσεις** της $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Αν $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ είναι το διάνυσμα θέσης του γνωστού σημείου P_0 και $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου P, τότε οι παραμετρικές εξισώσεις γράφονται με τη βοήθεια διανυσμάτων στη μορφή

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \quad (t \in \mathbb{R}),}$$

που ονομάζεται **παραμετρική διανυσματική εξίσωση** της ευθείας **ε**. Με χρήση του εξωτερικού γινομένου, η **ε** περιγράφεται και από την εξίσωση

$$\boxed{(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \times (\alpha, \beta, \gamma) = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a} = 0,}$$

η οποία ονομάζεται **διανυσματική εξίσωση** της **ε**.

Αν το διάνυσμα διεύθυνσης $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ δεν έχει μηδενική συντεταγμένη και δεν είναι κάθετο σε κάποιον από τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $z'z$, τότε με απαλοιφή της παραμέτρου $t \in \mathbb{R}$ στις παραμετρικές εξισώσεις, συμπεραίνουμε ότι ένα σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στην ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon}$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \quad (= t \in \mathbb{R}),}$$

οι οποίες ονομάζονται **αναλυτικές εξισώσεις** της $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon}$ που διέρχεται από το σημείο $P(1,3,-1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a}=(2,4,-1)$. Τότε οι παραμετρικές εξισώσεις της $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+4t \\ z = -1-t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

η παραμετρική διανυσματική εξίσωση της $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι

$$(x,y,z) = (1,3,-1) + t\,(2,4,-1) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

η διανυσματική εξίσωση της $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι

$$(x-1, y-3, z+1) \times (2,4,-1) = 0,$$

και οι αναλυτικές εξισώσεις της $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{-1} \;\; (= t \in \mathbb{R}).$$

Αν γνωρίζουμε τις αναλυτικές εξισώσεις

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \quad (= t \in \mathbb{R})$$

μίας ευθείας **ε**, τότε η **ε** διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα διεύθυνσης $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις, όταν κάποιες από τις συντεταγμένες του διανύσματος διεύθυνσης **a** είναι μηδενικές:

- Αν $\alpha, \beta \neq 0$ και $\gamma = 0$, τότε η ευθεία **ε** είναι κάθετη στον άξονα $z'z$ κι έχει αναλυτικές εξισώσεις

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \quad z = z_0.$$

- Αν $\alpha, \gamma \neq 0$ και $\beta = 0$, τότε η ευθεία **ε** είναι κάθετη στον άξονα $y'y$ κι έχει αναλυτικές εξισώσεις

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{z - z_0}{\gamma}, \quad y = y_0.$$

- Αν $\beta, \gamma \neq 0$ και $\alpha = 0$, τότε η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ κι έχει αναλυτικές εξισώσεις
$$\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}, \quad x = x_0.$$
- Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta = \gamma = 0$, τότε η ευθεία ε είναι κάθετη στους άξονες $y'y$ και $z'z$, άρα παράλληλη με τον άξονα $x'x$, κι έχει αναλυτικές εξισώσεις
$$x = t \ (t \in \mathbb{R}), \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$
- Αν $\beta \neq 0$ και $\alpha = \gamma = 0$, τότε η ευθεία ε είναι κάθετη στους άξονες $x'x$ και $z'z$, άρα παράλληλη με τον άξονα $y'y$, κι έχει αναλυτικές εξισώσεις
$$x = x_0, \quad y = t \ (t \in \mathbb{R}), \quad z = z_0.$$
- Αν $\gamma \neq 0$ και $\alpha = \beta = 0$, τότε η ευθεία ε είναι κάθετη στους άξονες $x'x$ και $y'y$, άρα παράλληλη με τον άξονα $z'z$, κι έχει αναλυτικές εξισώσεις
$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = t \ (t \in \mathbb{R}).$$

Αν θέλουμε να περιγράψουμε μία ευθεία **ε** για την οποία γνωρίζουμε δύο σημεία της, $P_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ και $P_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, τότε η **ε** είναι παράλληλη προς το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{P_1 P_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$. Κατά συνέπεια, οι παραμετρικές εξισώσεις της **ε** είναι

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_1 + t\left(x_2 - x_1\right) \\ y = y_1 + t\left(y_2 - y_1\right) \\ z = z_1 + t\left(z_2 - z_1\right) \end{array}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}),}$$

και οι αναλυτικές εξισώσεις της **ε** είναι

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (= t \in \mathbb{R}),}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ και $z_1 \neq z_2$.

Παρατήρηση (Σχετικές θέσεις δύο ευθειών)

Έστω μία ευθεία $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *που διέρχεται από το σημείο* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα* $\mathbf{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *και μία ευθεία* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *που διέρχεται από το σημείο* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα* $\mathbf{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. *Η σχετική θέση που έχουν αυτές οι δύο ευθείες είναι ακριβώς μία από τις ακόλουθες:*

- *Οι* $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *είναι συνεπίπεδες και παράλληλες, χωρίς να ταυτίζονται.*
- *Οι* $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *είναι συνεπίπεδες και τέμνονται, χωρίς να ταυτίζονται.*
- *Οι* $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *ταυτίζονται, δηλαδή είναι παράλληλες κι έχουν κοινό σημείο.*
- *Οι* $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *δεν είναι συνεπίπεδες και ονομάζονται* **ασύμβατες ευθείες**.

Προφανώς, η κυρτή γωνία που σχηματίζουν οι $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *ισούται με την κυρτή γωνία που σχηματίζουν τα* $\mathbf{a}_1$ *και* $\mathbf{a}_2$.

Πρόταση

Έστω δύο ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *με παραμετρικές διανυσματικές εξισώσεις*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \textit{και} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2 \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Τότε ισχύει ότι

$$\boxed{\textit{οι } \boldsymbol{\varepsilon}_1 \textit{ και } \boldsymbol{\varepsilon}_2 \textit{ είναι συνεπίπεδες} \Leftrightarrow [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = 0.}$$

Απόδειξη.

Ναι. □

Έστω δύο ασύμβατες ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, και $[MN]$ το μικρότερο δυνατό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $M \in \boldsymbol{\varepsilon}_1$ και $N \in \boldsymbol{\varepsilon}_2$. Τότε το $[MN]$ είναι το μοναδικό κοινό κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει σημεία των δύο ευθειών και το μήκος του ονομάζεται **απόσταση** των $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ και $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ και συμβολίζεται με $d(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$.

Πρόταση

Έστω δύο ασύμβατες ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *με παραμετρικές διανυσματικές εξισώσεις*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \textit{και} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 : \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2 \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Η απόσταση των $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *είναι*

$$\boxed{d\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2\right) = \frac{\left|\left[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\right]\right|}{\left\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\right\|}.}$$

Απόδειξη.

Ναι. $\square$

Πρόταση

Έστω δύο παράλληλες ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *με παραμετρικές διανυσματικές εξισώσεις*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \textit{και} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 : \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Η απόσταση των $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *είναι*

$$\boxed{d\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2\right) = \frac{\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}.}$$

Απόδειξη.

Ναι. □

Ο ίδιος τύπος ισχύει και για την απόσταση σημείου από ευθεία.

Άσκηση

Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(1,4,5)$ *από την ευθεία* $\boldsymbol{\varepsilon}: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-1}{2}$. *Έπειτα, βρείτε την προβολή του* A *στην ευθεία* $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Άσκηση

Βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $\alpha \neq 0$, *οι ευθείες* $\boldsymbol{\varepsilon}_1: \dfrac{3-z}{2} = 1-x = y$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2: \dfrac{z}{\alpha} = 1-x = y$ *είναι παράλληλες, ή τέμνονται, ή είναι ασύμβατες.*

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\boldsymbol{\varepsilon}_1: x-1 = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z-3}{2}$ *και* $\boldsymbol{\varepsilon}_2: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-4}{3} = z$ *είναι ασύμβατες. Έπειτα, να υπολογίσετε την απόσταση* $d(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ *και να κατασκευάσετε τις αναλυτικές εξισώσεις της κοινής κάθετης ευθείας.*

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε ένα επίπεδο **Π** για το οποίο γνωρίζουμε ένα σημείο $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ από το οποίο διέρχεται και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\mathbf{a} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right), \mathbf{b} = \left(\beta_1, \beta_2, \beta_3\right) \neq \mathbf{0}$ που είναι παράλληλά του. Τότε, ένα οποιοδήποτε σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στο **Π** αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{P_0P}$, **a** και **b** είναι συνεπίπεδα (γραμμικά εξαρτημένα), ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν υπάρχουν αριθμοί $t, s \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \Leftrightarrow \left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right) = t\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right) + s\left(\beta_1, \beta_2, \beta_3\right)$$

$$\Leftrightarrow x - x_0 = t\alpha_1 + s\beta_1, \;\; y - y_0 = t\alpha_2 + s\beta_2, \;\; z - z_0 = t\alpha_3 + s\beta_3.$$

Συνεπώς, ένα σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στο **Π** αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + t\alpha_1 + s\beta_1 \\ y &= y_0 + t\alpha_2 + s\beta_2 \\ z &= z_0 + t\alpha_3 + s\beta_3 \end{aligned}\right. \qquad (t, s \in \mathbb{R}),}$$

οι οποίες ονομάζονται **παραμετρικές εξισώσεις** του **Π**.

Αν $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ είναι το διάνυσμα θέσης του γνωστού σημείου P_0 και $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου P, τότε οι παραμετρικές εξισώσεις γράφονται με τη βοήθεια διανυσμάτων στη μορφή

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \quad (t, s \in \mathbb{R}),}$$

η οποία ονομάζεται **παραμετρική διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου Π. Με χρήση του μικτού γινομένου, λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\boxed{[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0,}$$

η οποία ονομάζεται **διανυσματική εξίσωση** του Π.

Γράφοντας το μικτό γινόμενο ως ορίζουσα των συντεταγμένων των τριών διανυσμάτων, λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,}$$

ή ισοδύναμα,

$$\boxed{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,}$$

η οποία ονομάζεται **αναλυτική εξίσωση** του Π.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το επίπεδο $\mathbf{\Pi}$ που διέρχεται από το σημείο $P(2,-1,1)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\mathbf{a}=(1,2,-1)$ και $\mathbf{b}=(5,-1,2)$. Τότε οι παραμετρικές εξισώσεις του $\mathbf{\Pi}$ είναι

$$\begin{cases} x = 2+t+5s \\ y = -1+2t-s \\ z = 1-t+2s \end{cases} \quad (t,s\in\mathbb{R}),$$

η παραμετρική διανυσματική εξίσωση του $\mathbf{\Pi}$ είναι

$$(x,y,z)=(2,-1,1)+t(1,2,-1)+s(5,-1,2) \quad (t,s\in\mathbb{R}),$$

η διανυσματική εξίσωση του $\mathbf{\Pi}$ είναι

$$[(x-2,y+1,z-1),(1,2,-1),(5,-1,2)]=0,$$

και η αναλυτική εξίσωση του $\mathbf{\Pi}$ είναι

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-(-1) & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x-7y-11z-2=0.$$

Αν θέλουμε να περιγράψουμε ένα επίπεδο Π το οποίο διέρχεται από τρία μη συγγραμμικά σημεία $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ και $P_3(x_3, y_3, z_3)$, τότε το Π είναι παράλληλο προς τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_2)$ και $\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Κατά συνέπεια, οι παραμετρικές εξισώσεις του Π είναι

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + s(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) + s(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) + s(z_3 - z_1) \end{array}\right. \qquad (t, s \in \mathbb{R}),}$$

και η αναλυτική εξίσωση του Π είναι

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε ένα επίπεδο $\mathbf{\Pi}$ το οποίο διέρχεται από ένα σημείο $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ και είναι κάθετο σε ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \neq \mathbf{0}$. Τότε, ένα οποιοδήποτε σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στο $\mathbf{\Pi}$ αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{P_0P}$ και $\boldsymbol{\eta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P} \circ \boldsymbol{\eta} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right) \circ \left(\eta_1, \eta_2, \eta_3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \eta_1\left(x - x_0\right) + \eta_2\left(y - y_0\right) + \eta_3\left(z - z_0\right) = 0,\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\boxed{\eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z - \left(\eta_1 x_0 + \eta_2 y_0 + \eta_3 z_0\right) = 0.}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η αναλυτική εξίσωση του $\mathbf{\Pi}$.

Παρατήρηση

Αν θέσουμε

$$A = \eta_1, \quad B = \eta_2, \quad \Gamma = \eta_3 \ \textit{και} \ \Delta = -\left(\eta_1 x_0 + \eta_2 y_0 + \eta_3 z_0\right),$$

τότε η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου $\mathbf{\Pi}$ *γράφεται*

$$\boxed{\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0, \quad \textit{με} \ (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma) \neq (0,0,0),}$$

η οποία είναι γνωστή ως **καρτεσιανή εξίσωση** *του* $\mathbf{\Pi}$. *Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε μία εξίσωση της μορφής* $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0$ (*με* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma) \neq (0,0,0)$), *τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτή περιγράφει ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma)$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις, όταν κάποιοι από τους συντελεστές της καρτεσιανής εξίσωσης του επιπέδου Π είναι μηδενικοί:

- Αν $A, B \neq 0$ και $\Gamma = 0$, τότε το Π είναι παράλληλο προς τον άξονα $z'z$.
- Αν $A, \Gamma \neq 0$ και $B = 0$, τότε το Π είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$.
- Αν $B, \Gamma \neq 0$ και $A = 0$, τότε το Π είναι παράλληλο προς τον άξονα $x'x$.
- Αν $A \neq 0$ και $B = \Gamma = 0$, τότε το Π είναι παράλληλο προς το επίπεδο yOz.
- Αν $B \neq 0$ και $A = \Gamma = 0$, τότε το Π είναι παράλληλο προς το επίπεδο xOz.
- Αν $\Gamma \neq 0$ και $A = B = 0$, τότε το Π είναι παράλληλο προς το επίπεδο xOy.
- Αν $\Delta = 0$, τότε το Π διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0, 0)$.

Παρατήρηση (Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων)

Έστω δύο επίπεδα $\mathbf{\Pi}_1 : A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$ *και* $\mathbf{\Pi}_2 : A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$. *Η σχετική θέση που έχουν αυτά τα δύο επίπεδα είναι ακριβώς μία από τις ακόλουθες:*

- *Τα* $\mathbf{\Pi}_1$ *και* $\mathbf{\Pi}_2$ *δεν ταυτίζονται και είναι παράλληλα, ή ισοδύναμα, δεν ταυτίζονται και τα κάθετα διανύσματά τους* $\boldsymbol{\eta}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1)$ *και* $\boldsymbol{\eta}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2)$ *είναι παράλληλα μεταξύ τους. Για να μην ταυτίζονται πρέπει και αρκεί τα* $(A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1)$ *και* $(A_2, B_2, \Gamma_2, \Delta_2)$ *να μην είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου.*
- *Τα* $\mathbf{\Pi}_1$ *και* $\mathbf{\Pi}_2$ *ταυτίζονται, ή ισοδύναμα, τα* $(A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1)$ *και* $(A_2, B_2, \Gamma_2, \Delta_2)$ *είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου.*
- *Τα* $\mathbf{\Pi}_1$ *και* $\mathbf{\Pi}_2$ *δεν είναι παράλληλα, ή ισοδύναμα, τα κάθετα διανύσματα* $\boldsymbol{\eta}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1)$ *και* $\boldsymbol{\eta}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2)$ *δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή, τα* $\mathbf{\Pi}_1$ *και* $\mathbf{\Pi}_2$ *τέμνονται και η τομή τους είναι μία ευθεία.*

Πρόταση

Έστω ένα επίπεδο $\Pi : \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0$ *κι ένα σημείο* $M(x_M, y_M, z_M)$ *εκτός αυτού. Η απόσταση του σημείου* M *από το επίπεδο* Π *είναι*

$$\boxed{d(M, \Pi) = \frac{|\mathrm{A}x_M + \mathrm{B}y_M + \Gamma z_M + \Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2}}.}$$

Απόδειξη.

Ναι. □

Άσκηση

Βρείτε τις αναλυτικές και παραμετρικές εξισώσεις της τομής των επιπέδων $\Pi_1 : x - 4y - z - 2 = 0$ *και* $\Pi_2 : 3x - 2y + z - 12 = 0$.

Άσκηση

Βρείτε την προβολή του σημείου $A(-6,3,-2)$ *στο επίπεδο* $\mathbf{\Pi}: x-2y+3z+10=0$. *Έπειτα, βρείτε το συμμετρικό του* A *ως προς το επίπεδο* $\mathbf{\Pi}$.

Άσκηση

Βρείτε το σημείο τομής M *του επιπέδου* $\mathbf{\Pi}: x+y+z=1$ *με την ευθεία* $\boldsymbol{\varepsilon}: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z-1$. *Έπειτα, βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας* $\boldsymbol{\varepsilon}'$ *που ανήκει στο* $\mathbf{\Pi}$, *διέρχεται από το* M *και είναι κάθετη στην* $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Άσκηση

Βρείτε την προβολή της ευθείας $\boldsymbol{\varepsilon}: x-1=\dfrac{y-1}{2}=z+3$ *επί του επιπέδου* $\mathbf{\Pi}: x+2y-z+4=0$.

Στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{E}$, η **σφαίρα** με κέντρο $K(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα $\rho \geq 0$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του $\mathbb{E}$ που απέχουν από το σημείο K απόσταση ρ. Η σφαίρα αυτή συμβολίζεται με $\mathbf{S}(K, \rho)$.

Ένα οποιοδήποτε σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στη σφαίρα $\mathbf{S}(K, \rho)$ αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο $K(x_0, y_0, z_0)$ της σφαίρας απόσταση ρ, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\|\overrightarrow{KP}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = \rho,$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν ικανοποιείται η εξίσωση

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2,}$$

η οποία είναι γνωστή ως **αναλυτική εξίσωση** της σφαίρας $\mathbf{S}(K, \rho)$.

Η αναλυτική εξίσωση της σφαίρας γράφεται

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2-\rho^2\right)=0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0,}$$

με $\mathrm{A}=-2x_0$, $\mathrm{B}=-2y_0$, $\Gamma=-2z_0$, $\Delta=x_0^2+y_0^2+z_0^2-\rho^2$.

Αντίστροφα, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\boxed{\left(x+\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\Gamma}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}.}$$

Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2\geq 4\Delta$, τότε αναπαριστάνει τη σφαίρα $\mathbf{S}(K,\rho)$ με κέντρο $K\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2},-\frac{\Gamma}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2-4\Delta}}{2}\geq 0$.

Παρατήρηση (Σχετικές δύο θέσεις σφαιρών)

Έστω δύο σφαίρες $\mathbf{S}(K_1, \rho_1)$ *και* $\mathbf{S}(K_2, \rho_2)$ *με αντίστοιχα κέντρα* K_1 *και* K_2 *και αντίστοιχες θετικές ακτίνες* ρ_1 *και* ρ_2 *με* $\rho_1 > \rho_2$. *Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:*

- *Η* $\mathbf{S}(K_2, \rho_2)$ *βρίσκεται εκτός της* $\mathbf{S}(K_1, \rho_1)$ *και δεν έχουν κοινά σημεία, ή ισοδύναμα,* $\left\|\overrightarrow{K_1K_2}\right\| > \rho_1 + \rho_2$.
- *Η* $\mathbf{S}(K_2, \rho_2)$ *βρίσκεται εντός της* $\mathbf{S}(K_1, \rho_1)$ *και δεν έχουν κοινά σημεία, ή ισοδύναμα,* $\left\|\overrightarrow{K_1K_2}\right\| < \rho_1 - \rho_2$.
- *Η* $\mathbf{S}(K_2, \rho_2)$ *εφάπτεται εξωτερικά της* $\mathbf{S}(K_1, \rho_1)$, *ή ισοδύναμα,* $\left\|\overrightarrow{K_1K_2}\right\| = \rho_1 + \rho_2$.
- *Η* $\mathbf{S}(K_2, \rho_2)$ *εφάπτεται εσωτερικά της* $\mathbf{S}(K_1, \rho_1)$, *ή ισοδύναμα,* $\left\|\overrightarrow{K_1K_2}\right\| = \rho_1 - \rho_2$.
- *Οι δύο σφαίρες έχουν άπειρα κοινά σημεία, ή ισοδύναμα,* $\rho_1 - \rho_2 < \left\|\overrightarrow{K_1K_2}\right\| < \rho_1 + \rho_2$.

Για να υπολογίσουμε τα κοινά σημεία δύο σφαιρών, επιλύουμε το σύστημα των αναλυτικών εξισώσεών τους.

Παρατήρηση (Σχετικές θέσεις σφαίρας κι επιπέδου)

Έστω μία σφαίρα $\mathbf{S}(K,\rho)$ *με κέντρο* K *και ακτίνα* $\rho > 0$, *κι ένα επίπεδο* $\mathbf{\Pi}$. *Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:*

- *Το επίπεδο* $\mathbf{\Pi}$ *δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τη σφαίρα* $\mathbf{S}(K,\rho)$, *ή ισοδύναμα,* $d(K,\mathbf{\Pi}) > \rho$.
- *Το επίπεδο* $\mathbf{\Pi}$ *εφάπτεται στη σφαίρα* $\mathbf{S}(K,\rho)$, *ή ισοδύναμα,* $d(K,\mathbf{\Pi}) = \rho$.
- *Το επίπεδο* $\mathbf{\Pi}$ *τέμνει τη σφαίρα* $\mathbf{S}(K,\rho)$ *σε άπειρα σημεία (τα οποία σχηματίζουν κύκλο στον τρισδιάστατο χώρο* $\mathbb{E}$*), ή ισοδύναμα,* $d(K,\mathbf{\Pi}) < \rho$.

Στην περίπτωση που $d(K,\mathbf{\Pi}) < \rho$ *και η τομή* $\mathbf{\Pi} \cap \mathbf{S}(K,\rho)$ *είναι κύκλος πάνω στο* $\mathbf{\Pi}$, *το κέντρο* K' *του κύκλου* $\mathbf{\Pi} \cap \mathbf{S}(K,\rho)$ *είναι η προβολή του* K *επί του επιπέδου* $\mathbf{\Pi}$ *και, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, η ακτίνα του κύκλου* $\mathbf{\Pi} \cap \mathbf{S}(K,\rho)$ *είναι* $\rho' = \sqrt{\rho^2 - \left\|\overrightarrow{KK'}\right\|^2}$.

Άσκηση

Έστω η σφαίρα $\mathbf{S}: x^2 + y^2 + z^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma z + \Delta = 0$ $(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2 > 4\Delta)$ *κι ένα σημείο* $M(x_M, y_M, z_M)$ *αυτής. Να αποδείξετε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας στο σημείο* M *έχει εξίσωση*

$$x_M x + y_M y + z_M z + \frac{\mathrm{A}}{2}(x + x_M) + \frac{\mathrm{B}}{2}(y + y_M) + \frac{\Gamma}{2}(z + z_M) + \Delta = 0.$$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z + 22 = 0$$

είναι αναλυτική εξίσωση σφαίρας που τέμνει το επίπεδο $\mathbf{\Pi}: x + y + z = 1.$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z + 25 = 0$$

είναι αναλυτική εξίσωση σφαίρας. Έπειτα, βρείτε επίπεδο $\mathbf{\Pi}$ *που να διέρχεται από το σημείο* $M(-6, 3, 2)$ *και να εφάπτεται στη σφαίρα αυτή.*

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι το επίπεδο $\mathbf{\Pi} : \ y + z = 2$ *τέμνει τη σφαίρα* $\mathbf{S} : \ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ *και να υπολογίσετε το κέντρο και την ακτίνα της τομής* $\mathbf{\Pi} \cap \mathbf{S}$. *Έπειτα να υπολογίσετε την ορθή προβολή του κύκλου* $\mathbf{\Pi} \cap \mathbf{S}$ *επί του επιπέδου* xOy.

Χώροι Εσωτερικού Γινομένου

Η μελέτη του εσωτερικού γινομένου σε ένα διανυσματικό χώρο θα μας επιτρέψει να ορίσουμε το μέτρο (τη νόρμα) διανύσματος, την ορθογωνιότητα (καθετότητα) μεταξύ διανυσμάτων και το συνημίτονο της κυρτής γωνίας που σχηματίζουν δύο διανύσματα, γενικεύοντας γνωστά αποτελέσματα της γεωμετρίας του επιπέδου.

Έστω ένας (πραγματικός) διανυσματικός χώρος V. Μία συνάρτηση "$\langle\cdot,\cdot\rangle$" : $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** αν για κάθε $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \geq 0$ (**μη αρνητικότητα**).

(β) $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(γ) $\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ (**προσθετική**).

(δ) $\langle\lambda\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ε) $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$ (**συμμετρική**).

Από τον ορισμό προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $\langle\mathbf{u},\lambda\mathbf{v}\rangle = \langle\lambda\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \lambda\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$,

(2) $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$,

(3) $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν $\langle\mathbf{u},\mathbf{x}\rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in V$.

Το εσωτερικό γινόμενο $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ το συμβολίζουμε και με $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα εσωτερικών γινομένων είναι τα ακόλουθα:

- Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\nu$, η συνάρτηση (**κανονικό ή ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο**)

$$(u_1, u_2, \ldots, u_\nu) \circ (v_1, v_2, \ldots, v_\nu) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_\nu v_\nu.$$

- Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\nu$, με "θετικά βάρη" $r_1, r_2, \ldots, r_\nu > 0$, η συνάρτηση

$$(u_1, u_2, \ldots, u_\nu) \circ (v_1, v_2, \ldots, v_\nu) = r_1 u_1 v_1 + r_2 u_2 v_2 + \cdots + r_\nu u_\nu v_\nu.$$

- Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, η συνάρτηση

$$(u_1, u_2) \circ (v_1, v_2) = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 7 u_2 v_2.$$

- Στον διανυσματικό χώρο $C[a, b] = \{$οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$, η συνάρτηση

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Αν θεωρήσουμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^\nu$ ως πίνακες-στήλες, τότε το κανονικό εσωτερικό γινόμενο γράφεται, με τη βοήθεια του γινομένου πινάκων, στη μορφή

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_\nu \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_\nu v_\nu .$$

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, και τα διανύσματα $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 3)$ και $\mathbf{w} = (2, 1, 0, -1)$ του $\mathbb{R}^4$. Τότε έχουμε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (1, 2, 3, 4) \circ (1, -1, 1, 3) = 1 - 2 + 3 + 12 = 14,$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (1, -1, 1, 3) \circ (2, 1, 0, -1) = 2 - 1 + 0 - 3 = -2,$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = (1, 2, 3, 4) \circ (2, 1, 0, -1) = 2 + 2 + 0 - 4 = 0.$$

Θεώρημα (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V κι ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ορισμένο στον V. Τότε, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

$$\boxed{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle.}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι παράλληλα.

Απόδειξη.

Ναι. □

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Μία συνάρτηση "$\|\cdot\|$" : $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{u}\| \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **νόρμα** ή **μέτρο** διανυσμάτων αν για κάθε διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \in V$ και αριθμό λ, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ (**μη αρνητικότητα**).
(β) $\|\mathbf{u}\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
(γ) $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{u}\|$, για κάθε αριθμό λ.
(δ) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (**τριγωνική ανισότητα**).

Από τις ισότητες $\mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{v}-\mathbf{u})$ και $\mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{u}-\mathbf{v})$ και την τριγωνική ανισότητα, προκύπτει ότι

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\| \geq \big|\, \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \,\big| \,.$$

Ενοποιώντας τη σχέση αυτή με την τριγωνική ανισότητα, καταλήγουμε στη γενικευμένη τριγωνική ανισότητα:

$$\boxed{\big|\, \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \,\big| \leq \|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.}$$

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V. Για κάθε εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ που ορίζεται στον V, η συνάρτηση $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}$ $(\mathbf{u}\in V)$ είναι νόρμα διανυσμάτων.

Απόδειξη.

Ναι. □

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και την επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Τότε, για κάθε $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\boxed{\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right)=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2.}$

(β) $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right)=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{v}\|^2.$

(γ) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\leq\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2.$

Απόδειξη.

Ναι. □

Η ισότητα του (α) καλείται **κανόνας του παραλληλογράμμου**. Γενικά, μία νόρμα $\|\cdot\|$ ορισμένη σε ένα διανυσματικό χώρο V επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\nu$, οι νόρμες που χρησιμοποιούνται πιο συχνά είναι

η νόρμα-1 $\|\mathbf{u}\|_1 = \|(u_1, u_2, \ldots, u_\nu)\|_1 = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_\nu|$,

η νόρμα-2 $\|\mathbf{u}\|_2 = \|(u_1, u_2, \ldots, u_\nu)\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_\nu^2}$,

η νόρμα-∞ $\|\mathbf{u}\|_\infty = \|(u_1, u_2, \ldots, u_\nu)\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_\nu|\}$.

Η νόρμα-2 επάγεται από το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (u_1, u_2, \ldots, u_\nu) \circ (v_1, v_2, \ldots, v_\nu) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_\nu v_\nu,$$

άρα είναι πράγματι νόρμα, και είναι γνωστή και ως **ευκλείδεια νόρμα**. Η νόρμα-1 και η νόρμα-∞ δεν επάγονται από εσωτερικό γινόμενο, διότι δεν ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Παρατήρηση

Στον πραγματικό διανυσματικό χώρο

$$C[a,b] = \{\textit{οι συνεχείς συναρτήσεις } f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο πραγματικό διάστημα $[a,b]$, *ορίζονται*

$$\begin{aligned}
&\textit{η νόρμα-1} && \|f(t)\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt, \\
&\textit{η νόρμα-2} && \|f(t)\|_2 = \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)^{1/2}, \\
&\textit{η νόρμα-}\infty && \|f(t)\|_\infty = \max\{|f(t)| \ : \ t \in [a,b]\}.
\end{aligned}$$

Η νόρμα-2 επάγεται από το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Έστω ένας (πραγματικός) διανυσματικός χώρος V, ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ορισμένο στον V και η νόρμα $\|\cdot\|$ που επάγεται από το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, η ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφεται

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \, \|\mathbf{v}\|^2 \Leftrightarrow |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Έτσι οδηγούμαστε στον ορισμό του συνημιτόνου

$$\boxed{\cos\left(\vartheta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\right) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}}$$

της κυρτής γωνίας

$$\vartheta_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}\right) \in [0, \pi]$$

που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Επιπλέον, ο ορισμός του συνημιτόνου δίνει την ισότητα

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, \cos\left(\vartheta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\right).}$$

Σε ένα διανυσματικό χώρο V, εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, λέμε ότι δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ είναι **ορθογώνια ή κάθετα**) μεταξύ τους, και συμβολίζουμε με $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, αν $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Δύο υπόχωροι U και W του V ονομάζονται **ορθογώνιοι ή κάθετοι**) μεταξύ τους, αν $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ για κάθε $\mathbf{u} \in U$ και $\mathbf{w} \in W$.

Για την επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$, έχουμε τη γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος:

$$\boxed{\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.}$$

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε πάλι τα διανύσματα $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 3)$ και $\mathbf{w} = (2, 1, 0, -1)$ του $\mathbb{R}^4$, και το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Τότε έχουμε τα μέτρα (για τη νόρμα-2)

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \|(1, 2, 3, 4)\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30},$$
$$\|\mathbf{v}\|_2 = \|(1, -1, 1, 3)\|_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{12},$$
$$\|\mathbf{w}\|_2 = \|(2, 1, 0, -1)\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

και τα συνημίτονα

$$\cos(\vartheta_{\mathbf{u},\mathbf{v}}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2} = \frac{14}{\sqrt{30}\sqrt{12}} = \frac{7\sqrt{10}}{30} = \cos(0.2358\pi),$$
$$\cos(\vartheta_{\mathbf{v},\mathbf{w}}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|_2\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{-2}{\sqrt{12}\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{6} = \cos(0.5757\pi),$$
$$\cos(\vartheta_{\mathbf{u},\mathbf{w}}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{w}\|_2} = \frac{0}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{w}$ είναι ορθογώνια και ικανοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{w}\|_2^2 &= \|(1,2,3,4)+(2,1,0,-1)\|_2^2 = \|(3,3,3,3)\|_2^2 \\ &= \left(\sqrt{9+9+9+9}\right)^2 = 36 \\ &= \left(\sqrt{30}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{w}\|_2^2. \end{aligned}$$

Άσκηση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, *εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *και την επαγόμενη νόρμα* $\| \cdot \|$. *Να αποδείξετε ότι δύο διανύσματα* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *έχουν ίσες νόρμες αν και μόνο αν τα διανύσματα* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *και* $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ *είναι ορθογώνια μεταξύ τους.*

Άσκηση

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^4$, *εφοδιασμένος με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Να αποδείξετε ότι η μικρότερη δυνατή γωνία που μπορεί να σχηματιστεί μεταξύ του διανύσματος* $\mathbf{u} = (1, 3, -1, 3)$ *και των μη μηδενικών διανυσμάτων της γραμμικής θήκης* $[(1, -1, 1, 1), (5, 1, -3, 3)]$ *είναι* $\dfrac{\pi}{4}$.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και την επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$. Ένα σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ του V ονομάζεται **ορθογώνιο** αν

$$\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j, \quad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, k \text{ με } i \neq j.$$

Αν επιπλέον τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_k$ είναι **μοναδιαία**, δηλαδή $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = \cdots = \|\mathbf{u}_k\| = 1$, τότε το σύνολο $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ ονομάζεται **ορθοκανονικό**. Αν ένα ορθοκανονικό (ή ορθογώνιο) σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ είναι βάση του V, τότε το $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ ονομάζεται **ορθοκανονική** (αντίστοιχα, **ορθογώνια**) **βάση** του V.

Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^4$, τα σύνολα

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

και

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

είναι ορθοκανονικές βάσεις.

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και την επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}$ του V είναι ορθογώνιο, τότε τα $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

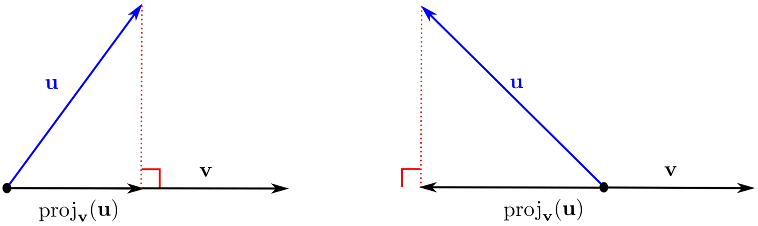
Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ ενός διανυσματικού χώρου V εφοδιασμένου με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και την επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$. Αν το διάνυσμα $\mathbf{u}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u_v},$$

όπου το $\hat{\mathbf{u}}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{v}$ και το $\mathbf{u_v}$ είναι παράλληλο του $\mathbf{v}$, τότε το $\mathbf{u_v}$ ονομάζεται **ορθογώνια προβολή** του $\mathbf{u}$ πάνω στο $\mathbf{v}$ και συμβολίζεται με $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$. Προφανώς, αν $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, τότε $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, και αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι συγγραμμικά, τότε $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.



Αφού το διάνυσμα $\mathbf{u_v} = \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$ είναι συγγραμικό του $\mathbf{v}$, υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $\mathbf{u_v} = \lambda\mathbf{v}$. Επομένως,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u_v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u_v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

και

$$\boxed{\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}.}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύει

$$\langle \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

άρα το διάνυσμα $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$ είναι πάντα ορθογώνιο στο $\mathbf{v}$. Επιπλέον, είναι φανερό ότι

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle.}$$

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V διάστασης ν, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, και μία ορθογώνια βάση $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ του V. Τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\rangle}\mathbf{u}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_\nu\rangle}{\langle \mathbf{u}_\nu, \mathbf{u}_\nu\rangle}\mathbf{u}_\nu.$$

Απόδειξη.

Όχι. □

Αν στην παραπάνω πρόταση, η βάση $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ είναι ορθοκανονική, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2\rangle\mathbf{u}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_\nu\rangle\mathbf{u}_\nu.$$

Η ανάλυση ενός διανύσματος στις ορθογώνιες προβολές του πάνω στα στοιχεία μίας ορθοκανονικής βάσης είναι γνωστή ως **ανάπτυγμα κατά Fourier**.

Για παράδειγμα, μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0), \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1), \frac{\sqrt{6}}{6}(-1,-1,2) \right\}.$$

Το ανάπτυγμα κατά Fourier του $\mathbf{x} = (1,0,-2)$ ως προς αυτή είναι

$$\mathbf{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\right) - \frac{5\sqrt{6}}{6}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}(-1,-1,2)\right).$$

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, και ένα ορθογώνιο σύνολο $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ διανυσμάτων του V. Τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in V$, ισχύει

$$\left(\mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle}\mathbf{u}_k\right) \perp \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Αν στην παραπάνω πρόταση, η βάση $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ είναι ορθοκανονική, τότε για κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in V$, ισχύει

$$\left(\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 - \cdots - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k\right) \perp \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Θεώρημα

Κάθε διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, έχει ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι, από μία βάση $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\nu\}$ του V μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μία ορθοκανονική βάση του V, εφαρμόζοντας τη **μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt**:

Υπολογίζουμε τα ορθογώνια διανύσματα

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{u}_1, \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1, \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2, \\
\mathbf{w}_4 &= \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{w}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle} \mathbf{w}_3, \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{w}_\nu &= \mathbf{u}_\nu - \frac{\langle \mathbf{u}_\nu, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{u}_\nu, \mathbf{w}_{\nu-1} \rangle}{\langle \mathbf{w}_{\nu-1}, \mathbf{w}_{\nu-1} \rangle} \mathbf{w}_{\nu-1}.
\end{aligned}$$

Κανονικοποιούμε τα διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_\nu$ διαιρώντας τα με τα μέτρα τους και ορίζοντας τα ορθοκανονικά διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}, \quad \ldots, \quad \mathbf{v}_\nu = \frac{\mathbf{w}_\nu}{\|\mathbf{w}_\nu\|}.$$

Άσκηση

Έστω η βάση $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \{(1,1,1),(0,1,2),(1,0,3)\}$ *του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^3$, *εφοδιασμένου με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Να κατασκευάσετε μία ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$, *εφαρμόζοντας τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt.*

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0)\}$ *είναι βάση του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^4$. *Έπειτα, να κατασκευάσετε μία ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^4$, *εφαρμόζοντας τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt.*

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, και ένας υπόχωρος U του V. Το σύνολο

$$U^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp \mathbf{u}, \text{ για κάθε } \mathbf{u} \in U\}$$

ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του U.

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα $U^{\perp}$ ενός υποχώρου U του V είναι επίσης υπόχωρος του V. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U^{\perp}$ και δύο οποιουσδήποτε αριθμούς λ_1, λ_2, τότε για κάθε $\mathbf{u} \in U$, ισχύει

$$\langle \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) \perp \mathbf{u},$$

δηλαδή $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \in U^{\perp}$.

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Για κάθε υπόχωρο U του V, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $V = U \oplus U^{\perp}$.

(β) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.

Απόδειξη.

Όχι. □

Αν $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του U και $\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_{\nu}\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του $U^{\perp}$, τότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} \in V$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_U + \mathbf{v}_{U^{\perp}},$$

όπου το

$$\mathbf{v}_U = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \, \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \, \mathbf{v}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_k \rangle \, \mathbf{v}_k$$

είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{v}$ στον υπόχωρο U

και το

$$\mathbf{v}_{U^\perp} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_{k+1} \rangle \mathbf{v}_{k+1} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_{k+2} \rangle \mathbf{v}_{k+2} + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_{\nu} \rangle \mathbf{v}_{\nu}$$

είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{v}$ στο ορθογώνιο συμπλήρωμα $U^\perp$.

Πρόταση

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης, εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Αν U και W είναι δύο υπόχωροι του V, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) *Αν $U \leq W$, τότε $W^\perp \leq U^\perp$.*

(β) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

(γ) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Άσκηση

Έστω ο υπόχωρος U *του* $\mathbb{R}^3$ *που παράγεται από το διάνυσμα* $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$. *Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος* $U^\perp$ *του* U *ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{R}^3$, *μια ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *που να περιέχει την παραπάνω βάση του* $U^\perp$, *και την ορθογώνια προβολή του διανύσματος* $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ *στον υπόχωρο* $U^\perp$.

Άσκηση

Έστω ο υπόχωρος U *του* $\mathbb{R}^4$ *που παράγεται από τα διανύσματα* $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 2)$ *και* $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 0)$. *Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα* $U^\perp$ *του* U *ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{R}^4$, *μία ορθοκανονική βάση του* $U^\perp$ *και τις ορθογώνιες προβολές του διανύσματος* $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$ *στους υποχώρους* U *και* $U^\perp$.

Ένας $\nu \times \nu$ πραγματικός πίνακας A που οι στήλες του σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^\nu$, ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, ονομάζεται **ορθομοναδιαίος**. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει

$$A^T A = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_1^T \\ \hline \mathbf{a}_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_\nu^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_\nu \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_\nu \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_\nu^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_\nu^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_\nu^T\mathbf{a}_\nu \end{bmatrix} = I_\nu,$$

και ο αντίστροφος του A είναι προφανώς ο $A^{-1} = A^T$ και $A^T A = AA^T = I_\nu$. Επιπλέον, είναι φανερό ότι ο πίνακας $A^T = A^{-1}$ είναι επίσης ορθομοναδιαίος.

Δύο ενδεικτικά παραδείγματα ορθομοναδιαίων πινάκων είναι

- ο πίνακας $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,
- ο πίνακας $A(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ $(\vartheta \in \mathbb{R})$, ο οποίος ονομάζεται **πίνακας στροφής**.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο ορθομοναδιαίων πινάκων είναι ορθομοναδιαίος πίνακας.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι ένας $\nu \times \nu$ πραγματικός διαγώνιος πίνακας είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν τα διαγώνια στοιχεία του είναι ίσα με 1 ή -1,

Πρόταση

Έστω ένας $\nu \times \nu$ πραγματικός ή μιγαδικός πίνακας A, το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και η επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|_2$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Ο A είναι ορθομοναδιαίος.*

(β) *Οι γραμμές του A σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$.*

(γ) $\|A\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$, *για κάθε διάνυσμα-στήλη* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$.

(δ) $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, *για κάθε διανύσματα-στήλες* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\nu$.

Απόδειξη.

Όχι. $\square$

Οποιαδήποτε νόρμα ικανοποιεί την ιδιότητα (γ) για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα A ονομάζεται **ορθομοναδιαία αναλλοίωτη**.

Άσκηση

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$. *Βρείτε για ποιες τιμές των* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *ο* A *είναι ορθομοναδιαίος.*

Άσκηση

Έστω ένας $\nu \times \nu$ *πραγματικός ορθομοναδιαίος πίνακας* $A = [a_{i,j}]$. *Να αποδείξετε ότι το αλγεβρικό συμπλήρωμα* $A_{i,j}$ *κάθε στοιχείου* $a_{i,j}$ *είναι* $A_{i,j} = a_{i,j} \det(A)$.

Θεωρούμε ένα $\mu \times \nu$ πραγματικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\nu} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \cdots & a_{\mu,\nu} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_\nu \end{array}\right]$$

με $\mu \geq \nu$, του οποίου οι στήλες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_\nu$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή, ο βαθμός του είναι $\text{rank}(A) = \nu$.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων-στηλών $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_\nu\}$ τέτοιο ώστε

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_\nu] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_\nu] = \text{Image}(A),$$

δηλαδή θέλουμε να κατασκευάσουμε μία ορθοκανονική βάση της εικόνας $\text{Image}(A)$ του πίνακα A.

Εφαρμόζουμε τη μεθόδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt, κανονικοποιώντας τώρα σε κάθε βήμα το διάνυσμα που υπολογίζουμε με την αφαίρεση των προβολών:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{a}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|_2},\\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|_2},\\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{a}_3 - \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{a}_3, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 \;\Rightarrow\; \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|_2},\\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
\mathbf{w}_\nu &= \mathbf{a}_\nu - \langle \mathbf{a}_\nu, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{a}_\nu, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 - \cdots - \langle \mathbf{a}_\nu, \mathbf{q}_{\nu-1} \rangle \mathbf{q}_{\nu-1}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\; \mathbf{q}_\nu = \frac{\mathbf{w}_\nu}{\|\mathbf{w}_\nu\|_2}.
\end{aligned}
$$

Θέτοντας, για $j = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ και $i = 1, 2, \ldots, j-1$,

$$r_{i,j} = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{q}_i \rangle = \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_j$$

και

$$r_{j,j} = \|\mathbf{w}_j\|_2 = \left\| \mathbf{a}_j - r_{1,j}\mathbf{q}_1 - r_{2,j}\mathbf{q}_2 - \cdots - r_{j-1,j}\mathbf{q}_{j-1} \right\|_2 ,$$

λαμβάνουμε τα ορθοκανονικά διανύσματα

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{a}_1}{r_{1,1}}, \\
\mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{a}_2 - r_{1,2}\mathbf{q}_1}{r_{2,2}}, \\
\mathbf{q}_3 &= \frac{\mathbf{a}_3 - r_{1,3}\mathbf{q}_1 - r_{2,3}\mathbf{q}_2}{r_{3,3}}, \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{q}_\nu &= \frac{\mathbf{a}_\nu - r_{1,\nu}\mathbf{q}_1 - r_{2,\nu}\mathbf{q}_2 - \cdots - r_{\nu-1,\nu}\mathbf{q}_{\nu-1}}{r_{\nu,\nu}},
\end{aligned}$$

Επιλύοντας το προηγούμενο σύστημα ως προς τις στήλες του πίνακα A, προκύπτει άμεσα ότι

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= r_{1,1}\mathbf{q}_1, \\
\mathbf{a}_2 &= r_{1,2}\mathbf{q}_1 + r_{2,2}\mathbf{q}_2, \\
\mathbf{a}_3 &= r_{1,3}\mathbf{q}_1 + r_{2,3}\mathbf{q}_2 + r_{3,3}\mathbf{q}_3, \\
\vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{a}_\nu &= r_{1,\nu}\mathbf{q}_1 + r_{2,\nu}\mathbf{q}_2 + \cdots + r_{\nu,\nu}\mathbf{q}_\nu.
\end{aligned}}$$

Αν ορίσουμε το $\mu \times \nu$ πίνακα

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_\nu \end{array} \right]$$

με ορθοκανονικές στήλες και το $\nu \times \nu$ άνω τριγωνικό πίνακα

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,\nu} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & r_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{\nu,\nu} \end{bmatrix},$$

τότε έχουμε την παραγοντοποίηση

$$\boxed{A = QR = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_\nu \end{array} \right] \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,\nu} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & r_{2,\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{\nu,\nu} \end{bmatrix}}$$

η οποία ονομάζεται (**απλή**) **παραγοντοποίηση** QR του πίνακα A και είναι μοναδική, πάντα υπό την προϋπόθεση ότι $\text{rank}(A) = \nu \leq \mu$.

Πίνακες
Ορίζουσες
Γραμμικά Συστήματα
Διανυσματικοί Χώροι
Χαρακτηριστικά Ποσά
Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας του Χώρου
Χώροι Εσωτερικού Γινομένου

Παρατήρηση

Αφού κατασκευάσουμε τον πίνακα Q, *εφαρμόζοντας τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt, μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας τον πίνακα* R:

$$\boxed{A = QR \Rightarrow Q^T A = Q^T QR \Rightarrow Q^T A = I_\nu R \Rightarrow R = Q^T A.}$$

Άσκηση

Βρείτε μία (απλή) παραγοντοποίηση QR του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση (Πρόβλημα Ελαχίστων Τετραγώνων)

Ένα $\mu \times \nu$ *γραμμικό σύστημα* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν υπάρχει ένα διάνυσμα-στήλη* $\mathbf{x}_0$ *τέτοιο ώστε* $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, *ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν το διάνυσμα-στήλη των σταθερών όρων* $\mathbf{b}$ *ανήκει στην εικόνα* $\mathrm{Image}(A)$ *του πίνακα* A. *Στην περίπτωση που* $\mathbf{b} \notin \mathrm{Image}(A)$, *το γραμμικό σύστημα δεν έχει λύση και το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση* $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ *για κάποια νόρμα. Αν επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε τη νόρμα-2, τότε έχουμε το* **πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων** *το οποίο διατυπώνεται ως εξής:*

Δεδομένου ενός $\mu \times \nu$ *πραγματικού πίνακα* A, *με* $\mu \geq \nu$, *κι ενός διανύσματος-στήλη* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mu}$, *να υπολογιστεί ένα διάνυσμα-στήλη* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\nu}$ *τέτοιο ώστε η απόσταση* $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$ *να είναι η ελάχιστη δυνατή.*

Όταν $\text{rank}(A) = \nu$, *μία δημοφιλής μέθοδος επίλυσης του προβλήματος αυτού είναι μέσω της (απλής) παραγοντοποίησης* QR *του πίνακα* A, $A = QR$. *Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι η λύση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων είναι το διάνυσμα-στήλη*

$$\mathbf{x} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$$

και είναι μοναδική, πάντα υπό την προϋπόθεση ότι $\text{rank}(A) = \nu \leq \mu$.

Η παραπάνω λύση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων ταυτίζεται με τη λύση του $\nu \times \nu$ γραμμικού συστήματος

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Άσκηση

Να επιλύσετε το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων για το γραμμικό σύστημα

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & -z & = & 1 \\ x & & & = & 2 \\ x & & -2z & = & 3 \\ x & +y & +z & = & 4 \end{array}\right. .$$