

ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση
(4ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. Έστω X χώρος με νόρμα και Y γνήσιος υπόχωρος του X . Να δείξετε ότι το σύνολο Y^c είναι πυκνό στον X .

Ασκηση 2. Με c_{00} συμβολίζουμε τον χώρο των τελικά μηδενικών ακολουθιών. Δηλαδή $x = (x_n) \in c_{00}$ εάν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n = 0$, για κάθε $n \geq n_0$. Να δείξετε ότι ο c_{00} δεν μπορεί να είναι χώρος Banach με όποια νόρμα και να τον εφοδιάσουμε.

Ασκηση 3. Έστω $X = C^1([-1, 1])$. Θέτουμε $\|f\|_1 = \|f\|_\infty$, $\|f\|_2 = \|f'\|_\infty$ και $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$. Να δείξετε ότι

(i) ο $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach,

(ii) η $\|\cdot\|_2$ δεν είναι νόρμα στον X ,

(iii) ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

Ασκηση 4. Να δείξετε ότι αν ο X είναι χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε γραμμικός τελεστής $T : X \rightarrow Y$, όπου Y χώρος με νόρμα, είναι φραγμένος.