

ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
Λύσεις του 3ου φυλλαδίου ασκήσεων

Άσκηση 1. Να δείξετε ότι ο χώρος

$$X = \{f \in C([a, b]) : f(a) = 0\}$$

με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι χώρος Banach.

Λύση. Αν (f_n) μία ακολουθία του X με $f_n \rightarrow f$, τότε η (f_n) θα συγκλίνει ομοιόμορφα άρα και κατά σημείο στην f και συνεπώς $f(a) = \lim f_n(a) = 0$. Συνεπώς ο X είναι κλειστός υπόχωρος του $C([a, b])$. Άρα από την άσκηση 3 του φυλ. 2 είναι και ο ίδιος χώρος Banach. $\square$

Άσκηση 2. Με l^∞ συμβολίζουμε τον χώρο των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι ο l^∞ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|, \text{ για } x = (x_n) \in l^\infty$$

είναι χώρος Banach.

Λύση. Έστω (x_k) μια ακολουθία Cauchy στον l^∞ . Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|x_n^k - x_n^l| \leq \max_n |x_n^k - x_n^l| = \|x_k - x_l\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } k, l \geq k_0, n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Τότε όμως, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ η ακολουθία $(x_n^k)_k$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς υπάρχει $x_n \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x_n^k \rightarrow x_n$, καθώς $k \rightarrow \infty$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$

Παίρνοντας όριο στην (1) για $l \rightarrow \infty$ έχουμε ότι

$$|x_n^k - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } k \geq k_0, n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Αν $x = (x_n)$ έχουμε ότι

$$\|x_k - x\|_\infty = \max_n |x_n^k - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ για κάθε } k \geq k_0,$$

και συνεπώς $x_k \rightarrow x$ στον l^∞ . Επιπλέον από την (2) έχουμε ότι $x - x_{k_0} \in l^\infty$ και άρα

$$x = x - x_{k_0} + x_{k_0} \in l^\infty.$$

Επομένως ο l^∞ είναι χώρος Banach. $\square$

Άσκηση 3. Με c_0 συμβολίζουμε τον χώρο των μηδενικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι ο c_0 εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι χώρος Banach. (Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 3 του φυλ. 2)

Λύση. Αφού από την άσκηση 2 του παρόντος φυλλαδίου ο l^∞ είναι χώρος Banach, από την άσκηση 3 του φυλ. 2 αρκεί να δείξουμε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του. Έστω λοιπόν μια ακολουθία (x_k) στον c_0 με $x_k \rightarrow x$ στην $\|\cdot\|_\infty$. Αν $x_k = (x_n^k)_n$ και $x = (x_n)$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|x_n^k - x_n| \leq \max_n |x_n^k - x_n| = \|x_k - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } k \geq k_0, \text{ και κάθε } n = 1, 2, \dots$$

Αφού $x_{k_0} = (x_n^{k_0})_n \in c_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|x_n^{k_0}| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Επομένως

$$|x_n| \leq |x_n - x_n^{k_0}| + |x_n^{k_0}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα $x_n \rightarrow 0$ και συνεπώς $x = (x_n) \in c_0$ από όπου προκύπτει το συμπέρασμα. $\square$

Άσκηση 4. Έστω συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Αν $f \in C([0, 1])$ θέτουμε

$$\|f\|_g = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|g(x).$$

- (i) Να δείξετε ότι η $\|\cdot\|_g$ είναι μία νόρμα στον $C([0, 1])$.
- (ii) Αν $\inf_{x \in [0, 1]} g(x) = m > 0$ και $\sup_{x \in [0, 1]} g(x) = M < +\infty$, να δείξετε ότι η $\|\cdot\|_g$ είναι ισοδύναμη νόρμα με την $\|\cdot\|_\infty$.

Λύση.

- (i) Προφανώς $\|f\|_g \geq 0$, για κάθε $f \in C([0, 1])$. Επιπλέον αν $\|f\|_g = 0$, τότε $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|g(x) = 0$ και συνεπώς $|f(x)|g(x) = 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$ το οποίο λόγω της υπόθεσης $g(x) > 0$ μας δίνει ότι $|f(x)| = 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$, δηλ $f = 0$.

$$\|\lambda f\|_g = \sup_{x \in [0, 1]} |\lambda f(x)|g(x) = |\lambda| \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|g(x) = |\lambda| \|f\|_g, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και κάθε } f \in C([0, 1]).$$

Για κάθε $f_1, f_2 \in C([0, 1])$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_2\|_g &\leq \sup_{x \in [0, 1]} (|f_1(x)| + |f_2(x)|)g(x) \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1]} |f_1(x)|g(x) + \sup_{x \in [0, 1]} |f_2(x)|g(x) \\ &= \|f_1\|_g + \|f_2\|_g. \end{aligned}$$

- (ii) Έχουμε ότι $m\|f\|_g \leq \|f\|_\infty \leq M\|f\|_g$, για κάθε $f \in C([0, 1])$. Άρα οι νόρμες είναι ισοδύναμες, $\square$

Άσκηση 5. (i) Να δείξετε ότι η μοναδιαία σφαίρα

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

ενός χώρου με νόρμα, είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Να δείξετε ότι η μοναδιαία σφαίρα του l^2 δεν είναι συμπαγής.

Λύση.

- (i) Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τη συνέχεια της νόρμας και το γεγονός ότι η S είναι η αντίστροφη εικόνα του μονοσυνόλου $\{1\}$.
- (ii) Θεωρούμε την ακολουθία (e_n) όπου η $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ με το 1 στην θέση n . Τότε για κάθε $n \neq m$ θα έχουμε ότι $\|e_n\| = \|e_m\| = 1$ αλλά $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$. Συνεπώς η (e_n) δεν έχει καμμία Cauchy υποακολουθία

Το παραπάνω είναι χαρακτηριστικό των χώρων άπειρης διάστασης καθώς είναι γνωστό ότι σε χώρους πεπερασμένης διάστασης κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι συμπαγές. $\square$