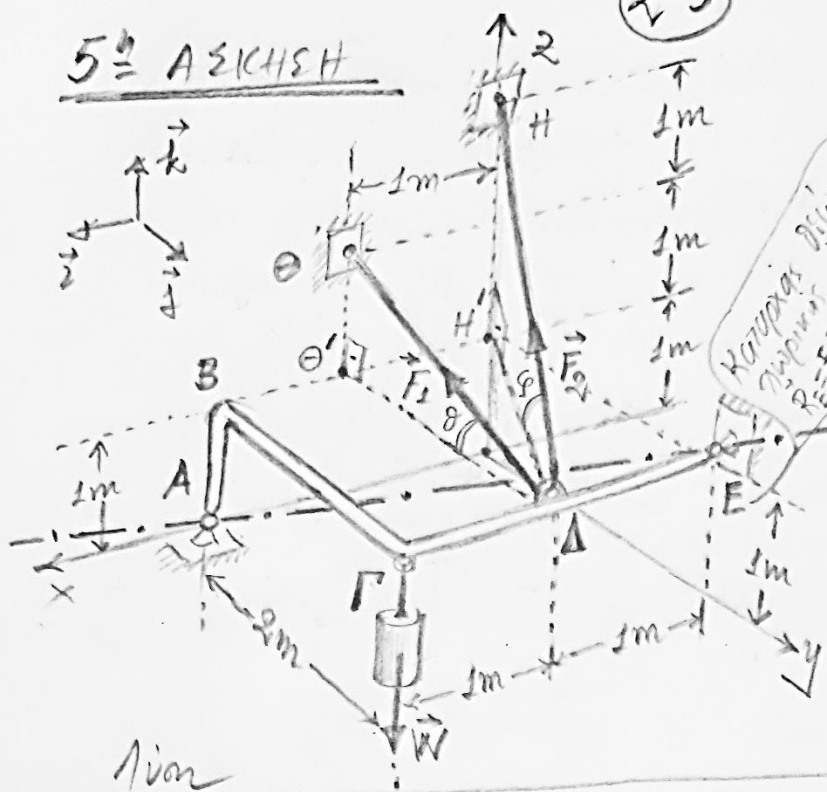


5^η ΑΣΚΗΣΗ

2-5



Διωνύσεια

Γεωμετρία, $W = 20 \text{ kN}$

$F_1 = F_2$ (λόγω συμμετρίας περί τ. Δ).

Ζητούμενα

- $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (μνδ. ποσότητες ως προς AE)
- $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ με τις τρεις συνιστώσες θ, φ
- $\vec{R}_E, \vec{R}_A$ (μνδ. ποσότητες ως προς A, και καταρχάς θέλουμε τις συνιστώσες αλληλόμενες: $\vec{R}_E = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$, $\vec{R}_A = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$)

α) $\Theta(1, 0, 2) \text{ m}$, $\Delta(1, 2, 1) \text{ m}$, $H(0, 0, 3) \text{ m}$, $A(2, 0, 0) \text{ m}$, $\Gamma(2, 2, 1) \text{ m}$
 $E(0, 2, 1) \text{ m}$.

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}_{\Delta\Theta}, \quad \vec{e}_{\Delta\Theta} = \frac{\vec{\Delta\Theta}}{\Delta\Theta}$$

(Εάν $\vec{W}$ στο Δ , τότε δίνει στα προβολιστικά ποσότητες για τον υπολογισμό των $\vec{F}_1, \vec{F}_2$)

$$\vec{\Delta\Theta} = -2\vec{j} + 1\vec{k} \text{ m}, \quad \Delta\Theta = \sqrt{5} \text{ m}, \quad \vec{e}_{\Delta\Theta} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{F}_1 = \frac{F_1}{\sqrt{5}}(-2\vec{j} + \vec{k}) \text{ kN} \quad (1)$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}_{\Delta H} \quad \frac{F_2 = F_1}{F_1 \vec{e}_{\Delta H}}, \quad \vec{e}_{\Delta H} = \frac{\vec{\Delta H}}{\Delta H}$$

$$\vec{\Delta H} = -1\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \text{ m}, \quad \Delta H = 3 \text{ m}, \quad \vec{e}_{\Delta H} = \frac{1}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\vec{F}_2 = \frac{F_1}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ kN} \quad (2)$$

Ισορροπία Εφόσον ο φορέας (κεκαμμένη ράβδος) ΑΒΓΔΕ ισορροπεί η συνιστώσα των ρομών του συστήματος εξωτερικών δυνάμεων $S' = \{ \vec{F}_1, \vec{F}_2 | \Delta, \vec{W} | \Gamma, \vec{R}_A | A, \vec{R}_E | E \}$ θα είναι μηδέν ως προς καθορισμένο μήκος και άξονα του κεντρίσματος κύβου (είτε αυτός στη ράβδο είτε όχι).

Η ισορροπία θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της F_1 .

(2-6)

Για να υπολογισθούν οι εδρώνες άγνωστες αντιδράσεις $\vec{R}_A$ και $\vec{R}_E$, λαμβάνεται "ισορροπία" (μηδενισμός) ροπών του συνάρματος των εξωτερικών δυνάμεων S ως προς τον άξονα AE .

Πράγματι, τότε, λόγω μιστικής αντιστάσεως οριζίου - άξονα,

οι ροπές των $\vec{R}_A, \vec{R}_E$ ως προς AE είναι μηδέν και άρα

δεν εμφανίζονται στην εξίσωση ισορροπίας, η οποία γράφεται:

$$M_{AE} = M_{AE}^{F_1} + M_{AE}^{F_2} + M_{AE}^W = 0 \text{ kNm} \quad (3) \quad \left. \begin{array}{l} \text{1 αλγεβρική εξίσωση, οπότε μπορεί να} \\ \text{υπολογιστεί μόνο 1 άγνωστο ή } F_1 = F_2. \end{array} \right\}$$

$$\left(\vec{M}_{AE} = (M_{AE}^{F_1} + M_{AE}^{F_2} + M_{AE}^W) \vec{e}_{AE} = 0 \text{ kNm} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{στην περίπτωση ροπών ως προς άξονα,} \\ \text{η 1 διασφαιρική εξίσωση δίνει 1 αλγεβρική} \end{array} \right\}$$

$$M_{AE}^{F_1} = (\vec{ED} \times \vec{F}_1) \cdot \vec{e}_{EA} \quad (\text{ή } \vec{e}_{AE}), \quad \vec{e}_{EA} = \frac{\vec{EA}}{EA}$$

$$\vec{EA} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 1\vec{k} \text{ m}, \quad EA = 3 \text{ m}, \quad \vec{e}_{EA} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{ED} \times \vec{F}_1 \stackrel{(1)}{=} 1\vec{i} \times \frac{F_1}{\sqrt{5}}(-2\vec{j} + \vec{k}) = -\frac{F_1}{\sqrt{5}}\vec{j} - \frac{2F_1}{\sqrt{5}}\vec{k} \text{ kNm}$$

$$M_{AE}^{F_1} = -\frac{F_1}{3\sqrt{5}}(\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) = -\frac{F_1}{3\sqrt{5}}(0.1 - 1.2 - 2.1) = \frac{4F_1}{3\sqrt{5}} \text{ kNm} \quad (4)$$

$$M_{AE}^{F_2} = (\vec{ED} \times \vec{F}_2) \cdot \vec{e}_{EA}$$

$$\vec{ED} \times \vec{F}_2 \stackrel{(2)}{=} 1\vec{i} \times \frac{F_2}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) = -\frac{2F_2}{3}(\vec{j} + \vec{k}) \text{ kNm}$$

$$M_{AE}^{F_2} = -\frac{2F_2}{9}(\vec{j} + \vec{k}) \cdot (2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) = -\frac{2F_2}{9}(0.1 - 1.2 - 1.1) = \frac{2F_2}{3} \text{ kNm} \quad (5)$$

$$M_{AE}^W = (\vec{EP} \times \vec{W}) \cdot \vec{e}_{EA}$$

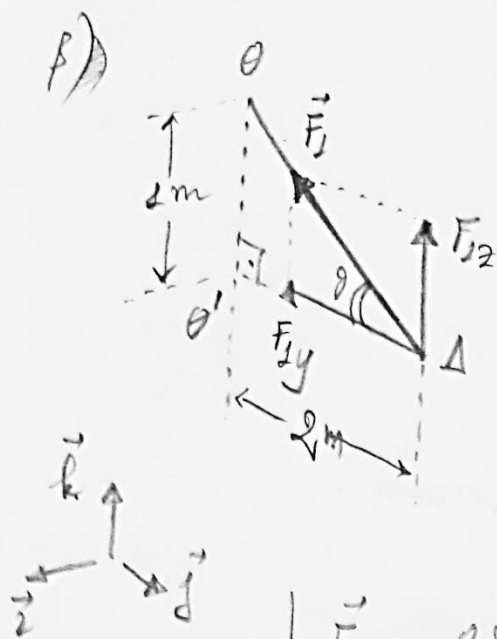
$$\vec{EP} \times \vec{W} = 2\vec{i} \times (-20)\vec{k} = +40\vec{j} \text{ kNm}$$

$$M_{AE}^W = 40\vec{j} \cdot \frac{1}{3}(2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) = \frac{40}{3}(0.1 - 1.2 - 0.1) = -\frac{80}{3} \text{ kNm} \quad (6)$$

(3), (4), (5), (6) $\Rightarrow$

$$\frac{4F_1}{3\sqrt{5}} + \frac{2F_2}{3} - \frac{80}{3} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} F_1 = \frac{40}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{F_1 = \frac{40\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \text{ kN}} \quad (7) \quad (21.11 \text{ kN})$$

2-7



$$F_{1y} = -F_1 \cos \theta, \quad F_{1z} = F_1 \sin \theta, \quad F_{1x} = 0$$

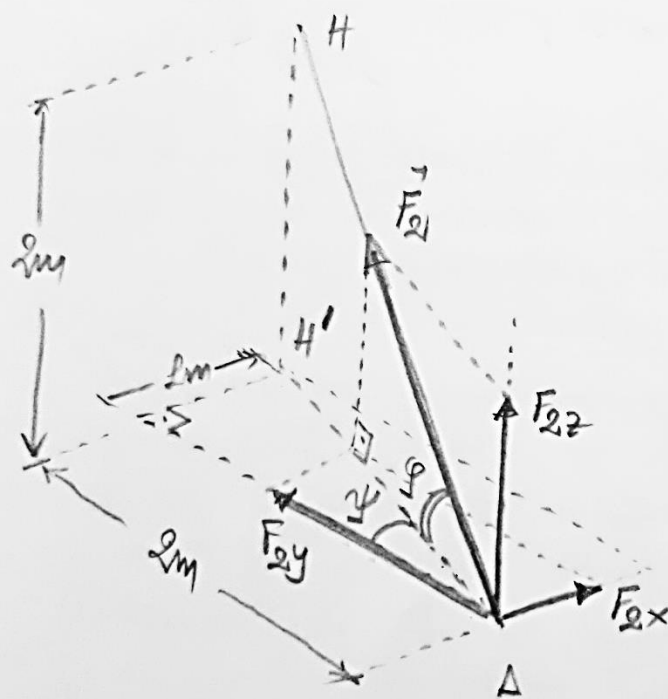
$$\vec{F}_1 = F_{1x} \vec{i} + F_{1y} \vec{j} + F_{1z} \vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = -F_1 \cos \theta \vec{j} + F_1 \sin \theta \vec{k}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 26.56^\circ$$

$$\cos \theta = 0.894, \quad \sin \theta = 0.447$$

$$\boxed{\vec{F}_1 = -0.894 F_1 \vec{j} + 0.447 F_1 \vec{k}} \quad \text{kN}$$



$$F_{2x} = -F_2 \cos \phi \sin \psi$$

$$F_{2y} = -F_2 \cos \phi \cos \psi$$

$$F_{2z} = F_2 \sin \phi$$

$$\Delta H' = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ m}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} = 41.81^\circ$$

$$\cos \phi = 0.745, \quad \sin \phi = 0.667$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 26.56^\circ$$

$$\cos \psi = 0.894, \quad \sin \psi = 0.447$$

$$\vec{F}_2 = -0.745 \times 0.447 F_2 \vec{i} - 0.745 \times 0.894 F_2 \vec{j} + 0.667 F_2 \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = F_2 (-0.333 \vec{i} - 0.666 \vec{j} + 0.667 \vec{k})} \quad \text{kN}$$

$F_1 = F_2$ $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ are perpendicular
to Δ .

2-8

γ) Μηδενικής ποσότης στο σημείο (ως προς) A :

$$\vec{M}_A = \vec{AP} \times \vec{W} + \vec{AD} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{AE} \times \vec{R}_E =$$

$$= (2\vec{j} + \vec{k}) \times (-20)\vec{k} +$$

$$+ (-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \times F_1 \left[-\frac{\vec{i}}{3} - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3} \right) \vec{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3} \right) \vec{k} \right] +$$

$$+ (-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \times (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) =$$

$$= -40\vec{i} +$$

$$+ F_1 \left[\left(\frac{4}{\sqrt{5}} + 2 \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} \right) \vec{j} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{3} \right) \vec{k} \right] +$$

$$+ (2E_z - E_y) \vec{i} + (2E_z + E_x) \vec{j} - (2E_x + 2E_y) \vec{k} =$$

$$= \left[2F_1 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1 \right) + 2E_z - E_y - 40 \right] \vec{i} +$$

$$+ \left[F_1 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3} \right) + 2E_z + E_x \right] \vec{j} +$$

$$+ \left[F_1 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{3} \right) - 2E_x - 2E_y \right] \vec{k} \equiv \vec{0} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (\vec{i}): \frac{2 \cdot 40\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - E_y + 2E_z = 40 - 40 \\ \quad \boxed{E_y - 2E_z = 40} \\ (\vec{j}): \frac{40\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \frac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} + E_x + 2E_z = 0 \\ \quad \boxed{E_x + 2E_z = -\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \frac{40}{3}} \\ (\vec{k}): \frac{40\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \frac{3+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} - E_x - E_y = 0 \\ \quad \boxed{E_x + E_y = \frac{3+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \frac{40}{3}} \end{cases}$$

Σύστημα
3x3

(8)
αλγεβρικών
εξισώσεων

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(-2) - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

Wzrostajemy (dł. podanych powier w wpr BD-dł. 100 cm) :

$$M_{BD} = M_{BD}^{RA} + M_{BD}^W + M_{BD}^{RE} \quad (14)$$

$$\vec{BD} = -\vec{i} + 2\vec{j} \text{ m}, \quad BD = \sqrt{5} \text{ m}, \quad \vec{e}_{BD} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$M_{BD}^{RA} = (\vec{BA} \times \vec{R}_A) \cdot \vec{e}_{BD}$$

$$\vec{BA} \times \vec{R}_A = -\vec{k} \times (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) = A_y \vec{i} - A_x \vec{j}$$

$$M_{BD}^{RA} = (A_y, -A_x, 0) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) = \frac{-A_y - 2A_x}{\sqrt{5}} \quad (15)$$

$$M_{BD}^W = (\vec{\Delta T} \times \vec{W}) \cdot \vec{e}_{BD}$$

$$\vec{\Delta T} \times \vec{W} = \vec{i} \times (-20) \vec{k} = 20 \vec{j}$$

$$M_{BD}^W = (0, 20, 0) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) = \frac{40}{\sqrt{5}} \quad (16)$$

$$M_{BD}^{RE} = (\vec{\Delta E} \times \vec{R}_E) \cdot \vec{e}_{BD}$$

$$\vec{\Delta E} \times \vec{R}_E = -\vec{i} \times (E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) = E_z \vec{j} - E_y \vec{k}$$

$$M_{BD}^{RE} = (0, E_z, -E_y) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) = \frac{2E_z}{\sqrt{5}} \quad (17)$$

$$(14), (15), (16), (17) \Rightarrow$$

$$M_{BD} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-A_y - 2A_x + 40 + 2E_z \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[-\frac{40}{2+\sqrt{5}} - \frac{40\sqrt{5}}{3(2+\sqrt{5})} + 40 \frac{3(2+\sqrt{5})}{3(2+\sqrt{5})} \right] =$$

$$= \frac{40}{3(2+\sqrt{5})\sqrt{5}} \left(-3 - 2\sqrt{5} + 6 + 3\sqrt{5} - 3 - \sqrt{5} \right) = 0 \quad \checkmark$$