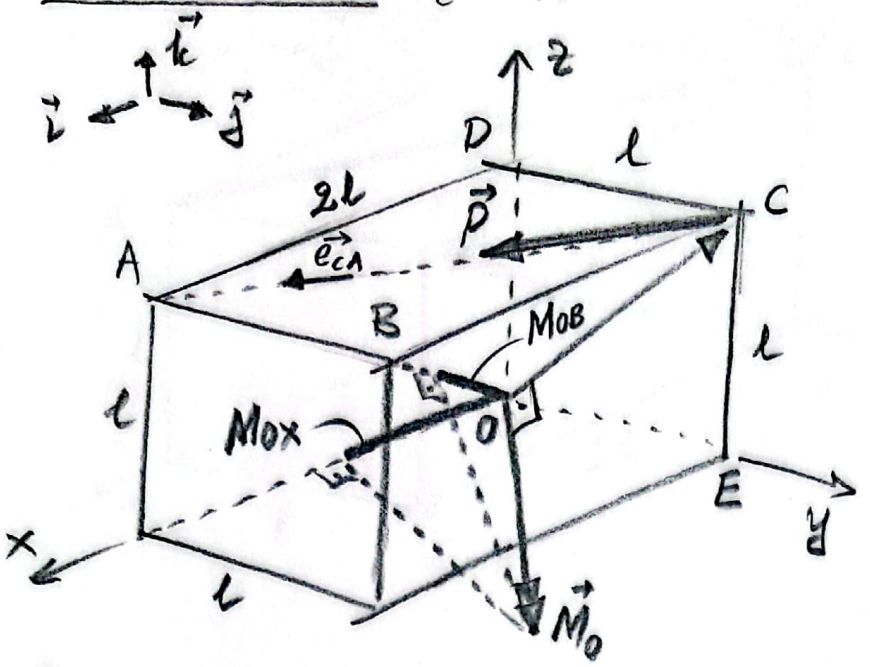
ΑΣΚΗΣΗ 2-1 (Γεωργιάδης – Ζήσης, Ασκ. 6, σελ. 79)



Ζητούνται

α) Ροπή της $\vec{P}$ ως προς το O

β) Ροπή της $\vec{P}$ ως προς τον άξονα x

γ) Ροπή της $\vec{P}$ ως προς τον άξονα OB

δ) Κάθετη απόσταση των ευθειών CA και OB.

α) $\vec{OC} = l\vec{j} + 2l\vec{k}$

$\vec{CA} = 2l\vec{i} - l\vec{j}$, $CA = l\sqrt{5}$ m, $\vec{e}_{CA} = \frac{\vec{CA}}{CA} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$

$\vec{P} = P\vec{e}_{CA} = \frac{P}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j})$

$\vec{M}_0 = \vec{OC} \times \vec{P} = (l\vec{j} + l\vec{k}) \times \frac{P}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) =$

$= \frac{Pl}{\sqrt{5}}(-2\vec{k} + 2\vec{j} + \vec{i}) = \frac{Pl}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})$ kNm

β) $M_{Ox} = \vec{M}_0 \cdot \vec{i} = \frac{Pl}{\sqrt{5}}(1, 2, -2) \cdot (1, 0, 0) = \frac{Pl}{\sqrt{5}}$ kNm

γ) $\vec{OB} = 2l\vec{i} + l\vec{j} + l\vec{k}$, $OB = l\sqrt{6}$ m,

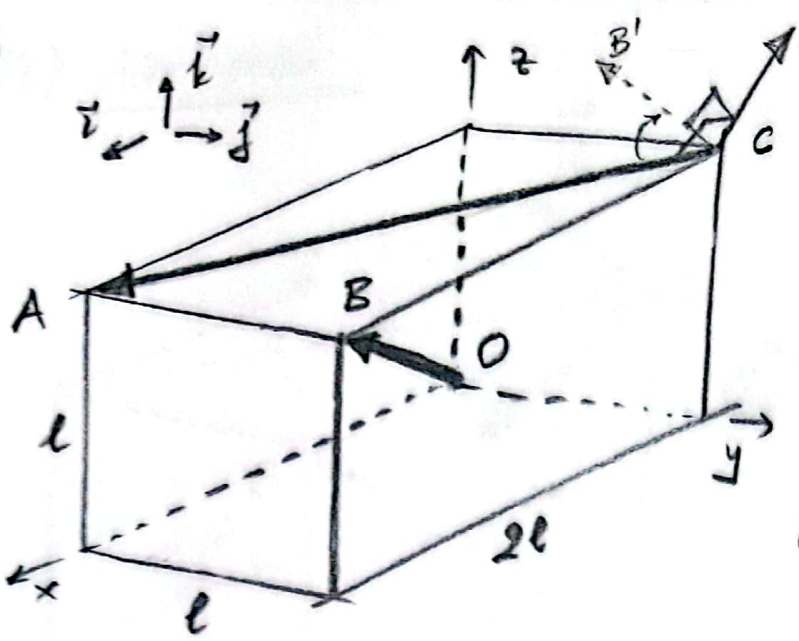
$\vec{e}_{OB} = \frac{\vec{OB}}{OB} = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$

$M_{OB} = \vec{M}_0 \cdot \vec{e}_{OB} = \frac{Pl}{\sqrt{5}}(1, 2, -2) \cdot (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) =$

$= \frac{Pl}{\sqrt{30}}(2 + 2 - 2) = \frac{2Pl}{\sqrt{30}}$ kNm

Σαρώθηκε με το CamScanner

γ)



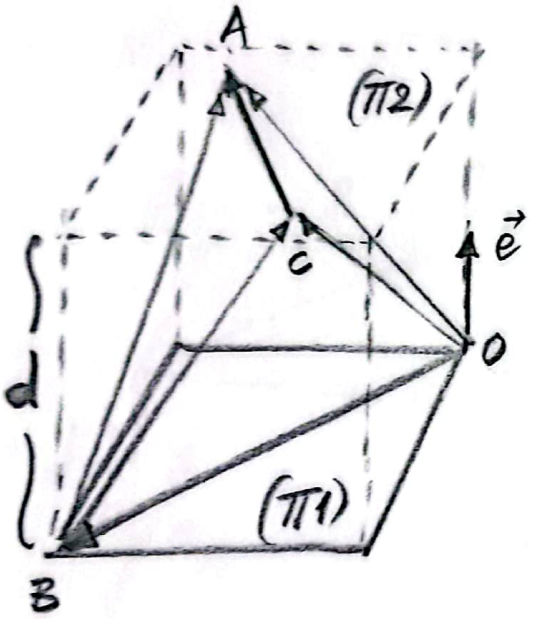
γ.1) Αναλυτική γεωμετρία

Μοναδιαίο διάνυσμα στην (κοινή) κάθετο μεταξύ $\vec{CA}$, $\vec{OB}$:

$$\vec{e} = \frac{\vec{CA}\times\vec{OB}}{|\vec{CA}\times\vec{OB}|}$$

$\vec{OB} \in (\Pi 1)$, $\vec{CA} \in (\Pi 2)$

$(\Pi 1) // (\Pi 2)$, η απόσταση d



$$d = \vec{BA}\cdot\vec{e} = \vec{BC}\cdot\vec{e} = \vec{OA}\cdot\vec{e} = \vec{OC}\cdot\vec{e}$$

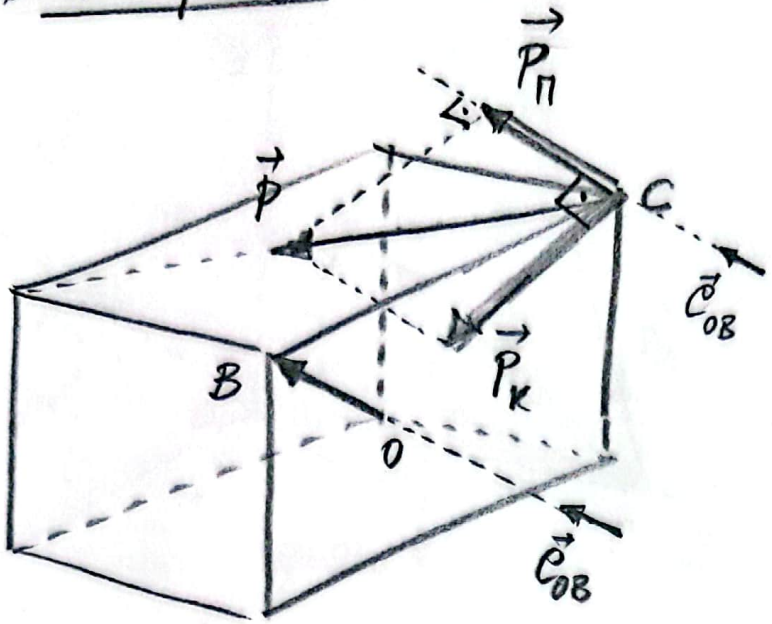
$$\vec{CA}\times\vec{OB} = (2l\vec{i} - l\vec{j})\times(2l\vec{i} + l\vec{j} + l\vec{k}) =$$
$$= l^2(2\vec{k} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - \vec{i}) =$$
$$= l^2(-\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$|\vec{CA}\times\vec{OB}| = l^2\sqrt{21}\ m^2, \quad \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\boxed{d = \vec{BA}\cdot\vec{e} = l(0,-1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}(-1,-2,4) = \frac{2l}{\sqrt{21}}\ m}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Γ.2) Αιθό ροπή



Βρέθηκε $M_{OB} = \frac{2Pl}{\sqrt{30}}$

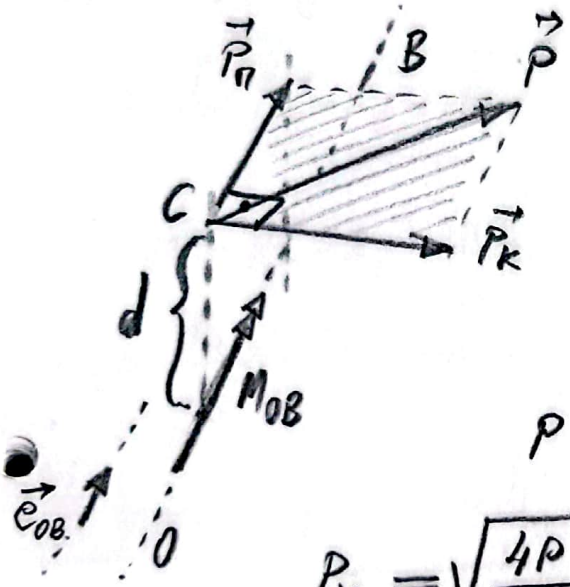
Ανάλυση $\vec{P}$ σε

$\vec{P}_\Pi$: παράλληλη OB

$\vec{P}_K$: κάθετη $\vec{P}_\Pi$

$$\vec{P} = \vec{P}_\Pi + \vec{P}_K$$

Η M_{OB} οφείλεται μόνο στην $\vec{P}_K$



$$P_\Pi = \vec{P} \cdot \vec{e}_{OB} =$$

$$= \frac{P}{\sqrt{5}}(2,-1,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1) =$$

$$= \frac{P}{\sqrt{30}}(4-1) = \frac{3P}{\sqrt{30}} \text{ kNm}$$

$$P^2 = P_\Pi^2 + P_K^2 \Rightarrow P_K = \sqrt{P^2 - P_\Pi^2} \Rightarrow$$

$$P_K = \sqrt{\frac{4P^2}{5} + \frac{P^2}{5} - \frac{9P^2}{30}} = \sqrt{\frac{21P^2}{30}} = P\sqrt{\frac{7}{10}} \text{ kNm}$$

$$M_{OB} = d\, P_K \Rightarrow \boxed{d = \frac{M_{OB}}{P_K} = \frac{2Pl}{\sqrt{30}} \frac{1}{P} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}} = \frac{2l}{\sqrt{21}} \text{ m}}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner