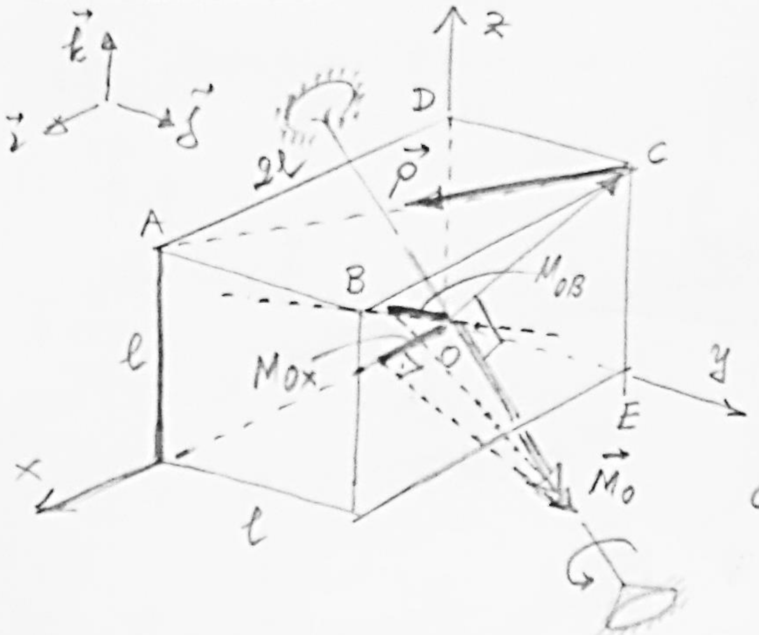
4η ΑΣΚΗΣΗ (Άσκηση 6, σελ. 79, Γεωργιάδης — Ζήσης)



α) Ροπή $\vec{P}$ ως προς O

$$\vec{M}_0 = \vec{OC} \times \vec{P}$$

$$\vec{OC} = l\vec{j} + l\vec{k}$$

$$\vec{P} = P\vec{e}_{CA}, \quad \vec{e}_{CA} = \frac{\vec{CA}}{CA}$$

$$\vec{CA} = 2l\vec{i} - l\vec{j} \text{ m}, \quad CA = l\sqrt{5} \text{ m}$$

$$\vec{P} = \frac{P}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j}) \text{ kN}$$

$$\boxed{\vec{M}_0 = \frac{Pl}{\sqrt{5}}(\vec{j} + \vec{k}) \times (2\vec{i} - \vec{j}) = \frac{Pl}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) \text{ kNm}}$$

β) Ροπή $\vec{P}$ ως προς άξονα x (το βαθμωτό μέγεθος)

$$\boxed{M_{0x} = \vec{M}_0 \cdot \vec{i} = \frac{Pl}{\sqrt{5}}(1,2,-2)\cdot(1,0,0) = \frac{Pl}{\sqrt{5}} \text{ kNm}}$$

γ) Ροπή $\vec{P}$ ως προς άξονα OB (βαθμωτό)

$$M_{0B} = \vec{M}_0 \cdot \vec{e}_{0B}, \quad \vec{e}_{0B} = \frac{\vec{OB}}{OB}$$

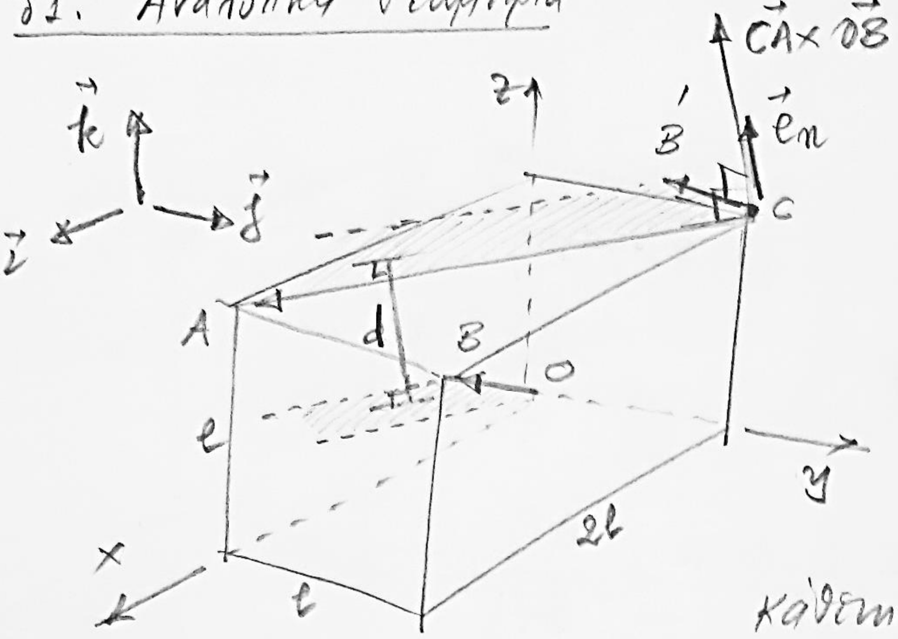
$$\vec{OB} = 2l\vec{i} + l\vec{j} + l\vec{k} \text{ m}, \quad OB = l\sqrt{6} \text{ m}$$

$$\boxed{M_{0B} = \frac{Pl}{\sqrt{5}}(1,2,-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1) = \frac{Pl}{\sqrt{30}}(2+2-2) = \frac{2Pl}{\sqrt{30}} \text{ kNm}}$$

$$\left(\vec{e}_{0B} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\right)$$

δ) Κάθετη απόσταση των ευθειών CA και OB

δ1. Αναλυτική Γεωμετρία



Το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κοινή κάθετο στα $\vec{CA}$ και $\vec{OB}$, είναι:

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{CA}\times\vec{OB}}{|\vec{CA}\times\vec{OB}|}$$

και το μέτρο d της κάθετης απόστασης $\vec{CA}$, $\vec{OB}$ θα είναι: $\underline{d = \vec{BA}\cdot\vec{e}_n}$ ή $\vec{BC}\cdot\vec{e}_n$ ή $\vec{OC}\cdot\vec{e}_n$ ή $\vec{OA}\cdot\vec{e}_n$

$\vec{CA} = 2\ell\vec{i} - \ell\vec{j}$ m, $\quad \vec{OB} = 2\ell\vec{i} + \ell\vec{j} + \ell\vec{k}$ m

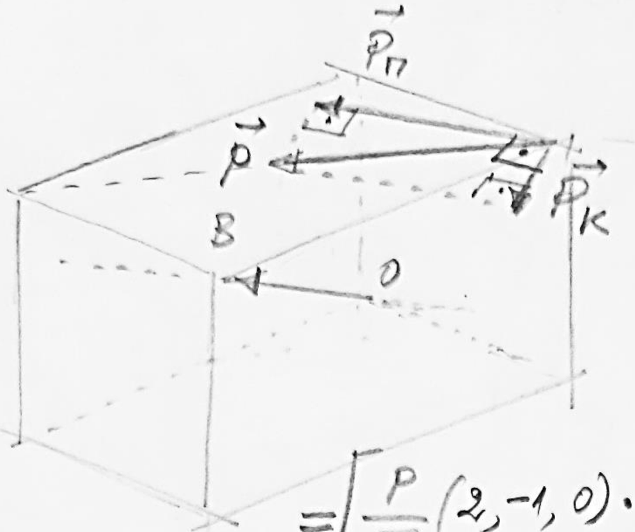
$$\vec{CA}\times\vec{OB} = \ell^2(2\vec{i}-\vec{j})\times(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) =$$

$$= \ell^2(2\vec{k} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - \vec{i}) = \ell^2(-\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})\ \text{m}^2$$

$|\vec{CA}\times\vec{OB}| = \ell^2\sqrt{21}\ \text{m}^2$, $\quad \vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{21}}(-\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})$

$$\boxed{d = \vec{BA}\cdot\vec{e}_n = \ell(0,-1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}(-1,-2,4) = \frac{2\ell}{\sqrt{21}}\ \text{m}}$$

δ2. Με τη βοήθεια της ροπής M_{OB}



Η M_{OB} ορίζεται μόνο στη συνιστώσα $\vec{P}_K$ της

$$\vec{P} = \vec{P}_\Pi + \vec{P}_K \quad (\vec{P}_\Pi // \vec{OB})$$

$$\vec{P}_\Pi = (\vec{P}\cdot\vec{e}_{OB})\,\vec{e}_{OB} =$$

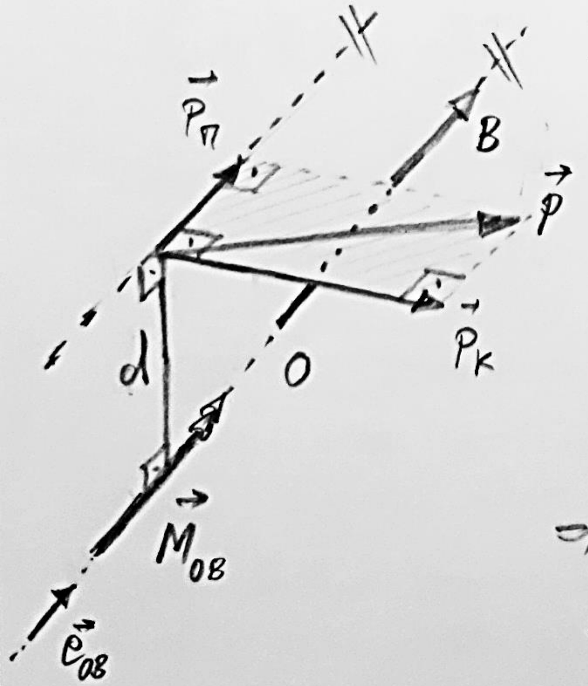
$$= \left[\frac{P}{\sqrt{5}}(2,-1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)\right]\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) =$$

$$= \frac{3P}{\sqrt{5}\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = \frac{P}{2\sqrt{5}}(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) \text{ kN}$$

$$\vec{P}_K = \vec{P} - \vec{P}_\Pi = \frac{P}{\sqrt{5}}\left[(2-1)\vec{i} + \left(-1-\frac{1}{2}\right)\vec{j} + \left(0-\frac{1}{2}\right)\vec{k}\right] =$$

$$= \frac{P}{\sqrt{5}}\left(\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}\right) = \frac{P}{2\sqrt{5}}(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}) \text{ kN}$$

$$P_K = \frac{P}{2\sqrt{5}}\sqrt{14} = \frac{P\sqrt{2}\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} = P\sqrt{\frac{7}{10}}$$



Και πρέπει να ισχύει:

$$M_{OB} = d\cdot P_K \Rightarrow \frac{2\cancel{P}l}{\sqrt{3\cancel{0}}} = d\cdot\cancel{P}\sqrt{\frac{7}{\cancel{10}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{2l}{\sqrt{21}} \text{ m}}$$