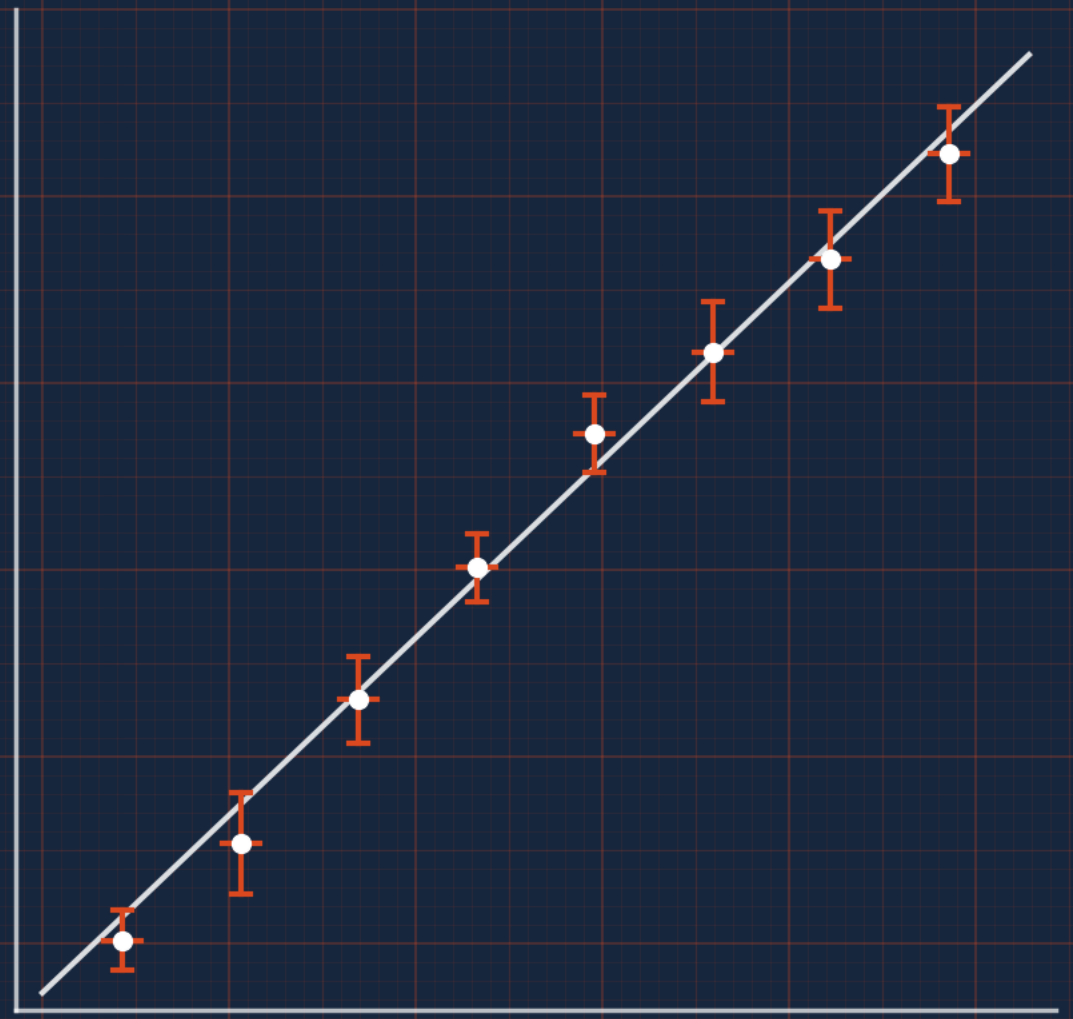
ΦΥΣΙΚΗ Ι · ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΜΠ · 2026–27

Εργαστήρια Φυσικής Ι

Τα πειράματα της χρονιάς και η επεξεργασία πειραματικών δεδομένων



Ιωάννης Θεοδώνης
Υπεύθυνος Εργαστηρίων · ytheod@mail.ntua.gr

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

Τι θα δούμε σήμερα

01

Γιατί κάνουμε πειράματα

Ο ρόλος της μέτρησης στη Φυσική

02

Τα εργαστήρια της χρονιάς

Οργάνωση και οι έξι ασκήσεις

03

Μέτρηση και σφάλματα

Τυχαία, συστηματικά, ακρίβεια

04

Επεξεργασία μετρήσεων

Μέση τιμή, στρογγυλοποίηση, διάδοση

05

Γραφικές και ελάχιστα τετράγωνα

Γραμμικοποίηση, κλίση, σύγκριση

06

Προετοιμασία και αναφορές

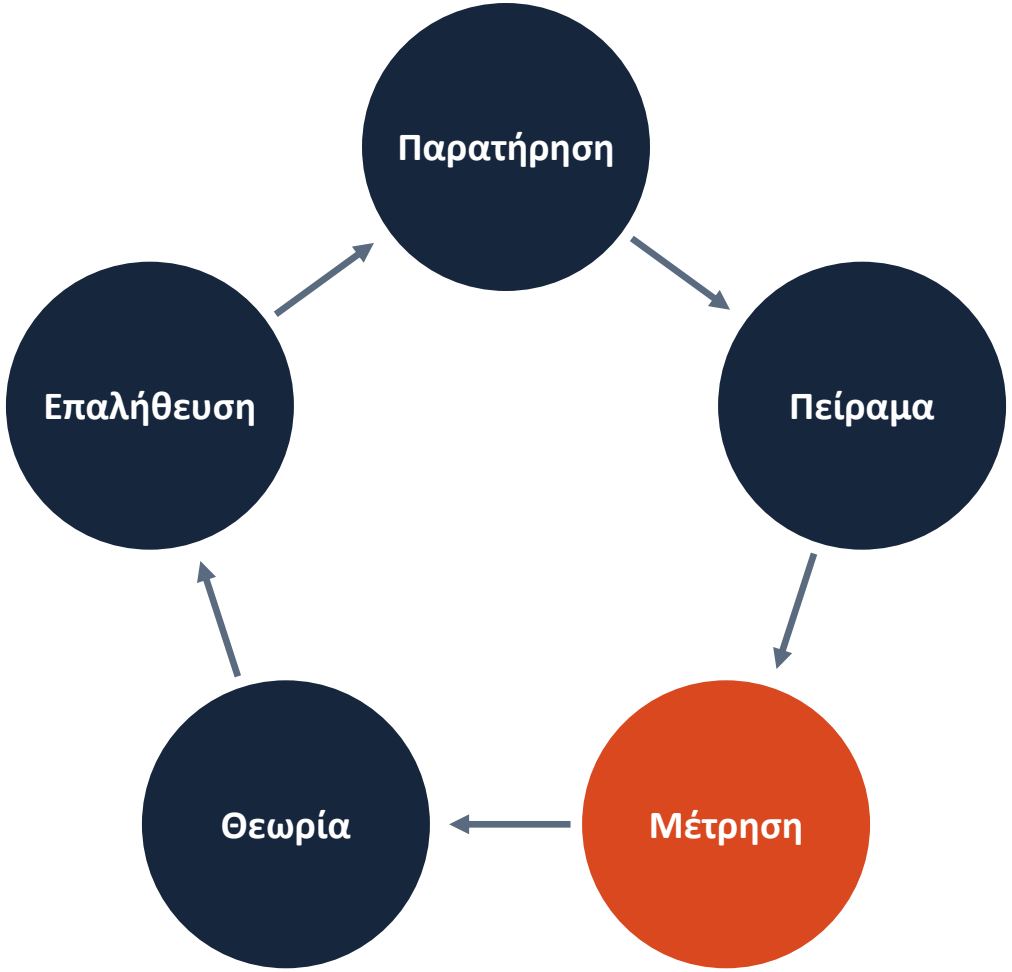
Πριν από το εργαστήριο · πώς γράφουμε

01

Γιατί κάνουμε πειράματα

Παρατήρηση, μέτρηση, θεωρία — και γιατί καμία μέτρηση δεν είναι «ακριβής»

Ο κύκλος της επιστημονικής γνώσης



Μετράμε άμεσα

χρόνους, μήκη, μάζες, τάσεις, εντάσεις ρεύματος

Υπολογίζουμε

ταχύτητες, επιταχύνσεις, ιξώδες, ροπές αδράνειας… (παράγωγα μεγέθη)

Ο κύκλος δεν κλείνει ποτέ

κάθε νέα θεωρία προβλέπει φαινόμενα που πρέπει να ελεγχθούν πειραματικά

Μάθημα και εργαστήριο: δύο όψεις της Φυσικής



ΜΑΘΗΜΑ

- Οι βασικές αρχές της θεωρίας
- Επίλυση θεωρητικών προβλημάτων



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

- Γνωριμία με τα βασικά όργανα
- Πειραματικές δεξιότητες
- Επεξεργασία αποτελεσμάτων
- Αξιολόγηση μεθόδου και οργάνων
- Εκτίμηση της ακρίβειας του θεωρητικού μοντέλου
- Κατανόηση των βασικών νόμων
- Φαινόμενα που δεν καλύπτει η ύλη του μαθήματος

ΕΝΑ ΑΠΛΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Πού θα πέσει η οβίδα;

Ένα πυροβόλο ρίχνει την οβίδα με αρχική ταχύτητα $υ_0$ υπό γωνία φ. Σε ποια απόσταση θα πέσει;

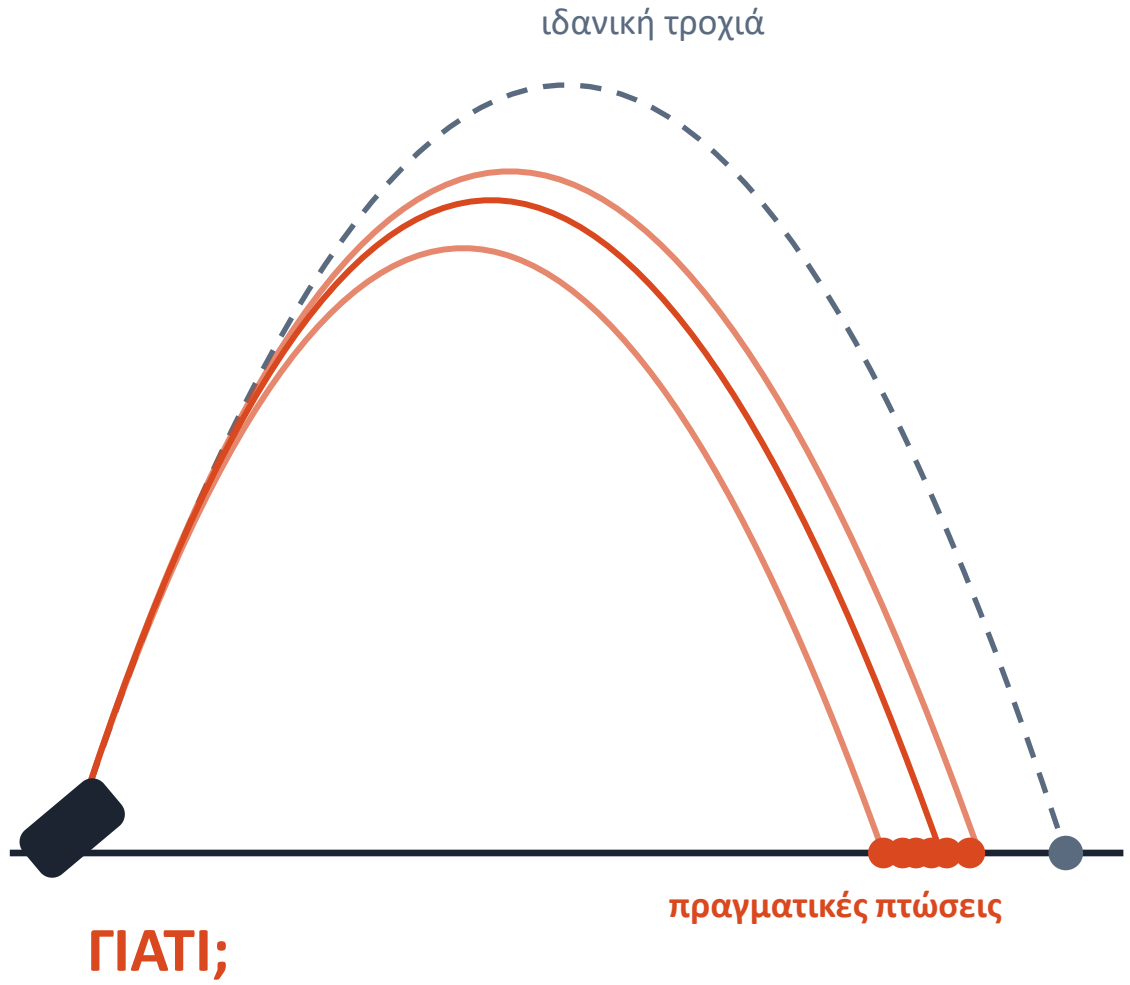
Η «εύκολη» απάντηση:

$$s = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

Αν όμως μετρήσουμε:

① ο τύπος δεν επαληθεύεται ακριβώς

② διαδοχικές βολές από το ίδιο πυροβόλο πέφτουν σε διαφορετικά σημεία



Γιατί; Γιατί δεν ξέρουμε όλους τους παράγοντες

Αντίσταση του αέρα και άνεμος (εξαρτάται από το σχήμα της οβίδας)

Η επιτάχυνση g μεταβάλλεται με το ύψος

Η οβίδα θερμαίνεται από την τριβή και διαστέλλεται

Φωτόνια χτυπούν την οβίδα ασύμμετρα και ασκούν πίεση

Η πυκνότητα του αέρα αλλάζει με το ύψος

Βαρυτική επίδραση Ήλιου, Σελήνης και γύρω αντικειμένων

Φορτίζεται από την τριβή → ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις

… και πολλοί ακόμη

Για ακριβή πρόβλεψη πρέπει να ξέρουμε ΟΛΟΥΣ τους παράγοντες — αδύνατο.
Για να πέσουν δύο οβίδες στο ίδιο σημείο, ΟΛΕΣ οι συνθήκες πρέπει να είναι ταυτόσημες — αδύνατο.
⇒ Κάθε μέτρηση συνοδεύεται από αβεβαιότητα.

02

Τα εργαστήρια της χρονιάς

Οργάνωση, οι έξι ασκήσεις και τι θα μετρήσετε σε καθεμία

Η οργάνωση με μια ματιά

6
ασκήσεις Μηχανικής

3
ασκήσεις ανά φοιτητή/τρια

Παρ.
12:45–14:30

Κτ. Β
αίθουσες 202 & 203, 2ος όροφος

Τμήματα, ομάδες και ημερομηνίες ανακοινώνονται στο helios.

Πριν από κάθε άσκηση διαβάζετε ΟΛΟΚΛΗΡΟ το φυλλάδιό της.

Χάσατε άσκηση για σοβαρό λόγο; Αναπλήρωση με άλλο τμήμα, σε συνεννόηση με τον επιβλέποντα της άσκησης.

Υπεύθυνος: Ι. Θεοδώνης · Γραφείο 303α · ytheod@mail.ntua.gr

ΤΙ ΘΑ ΜΕΤΡΗΣΕΤΕ

Οι έξι ασκήσεις

1 Επιτάχυνση βαρύτητας με πτώση σωμάτων

Μετράμε: ύψος h, χρόνος πτώσης t

Βρίσκουμε: g

2 Επιτάχυνση βαρύτητας με φυσικό εκκρεμές

Μετράμε: απόσταση L, περίοδος T

Βρίσκουμε: g, ακτίνα αδράνειας Kc

5 Ιξώδες υγρού με πτώση μικρών σφαιρών

Μετράμε: ακτίνα r, χρόνος πτώσης, θερμοκρασία

Βρίσκουμε: συντελεστής ιξώδους η

6 Συντελεστής αποκατάστασης και χρόνος κρούσης

Μετράμε: εκτροπές s, τάση πυκνωτή U_{C}

Βρίσκουμε: k, χρόνος κρούσης t_o, δύναμη F

7 Νόμοι της κίνησης με αεροτροχιά

Μετράμε: χρόνοι φωτοπυλών, μάζες, ύψος

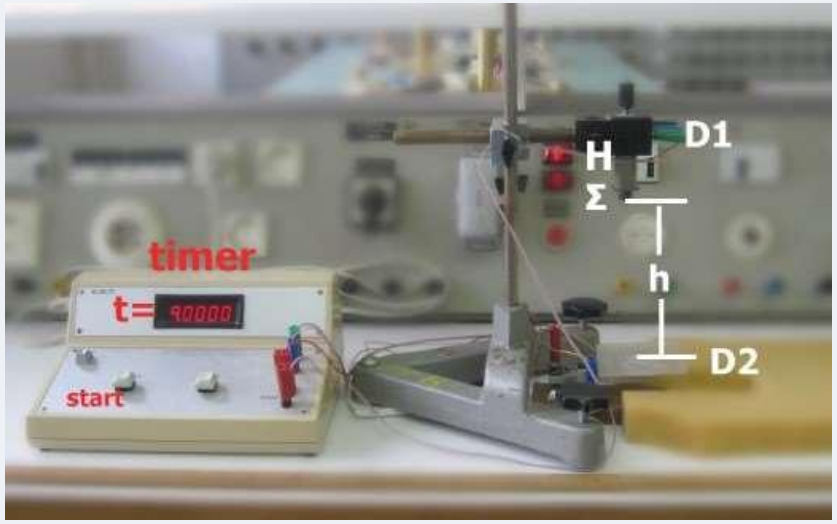
Βρίσκουμε: 2ος νόμος, διατήρηση ενέργειας

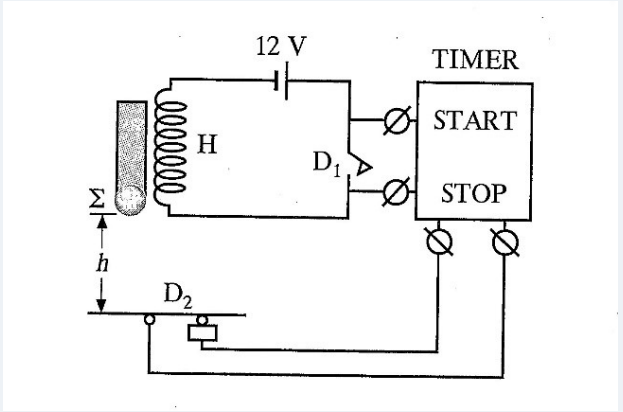
16 Ροπή αδράνειας στερεών σωμάτων

Μετράμε: δύναμη–γωνία, περίοδοι ταλαντώσεων

Βρίσκουμε: σταθερά D, ροπές αδράνειας I

Άσκηση 1 · g με πτώση σωμάτων





ΝΟΜΟΣ

$$h = \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\sqrt{h} \;+\; t_0$$

ΜΕΤΡΑΤΕ

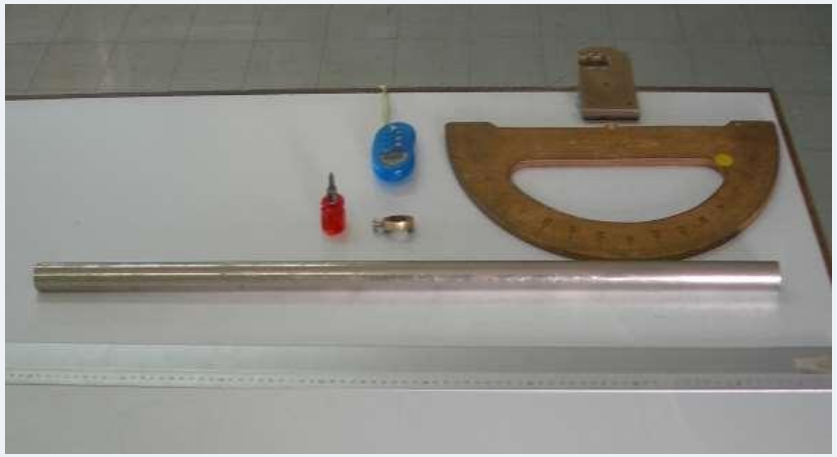
8 ύψη h μεταξύ 10 και 100 cm · 5 χρόνους πτώσης t για κάθε ύψος (ηλεκτρονικό χρονόμετρο)

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Μέση τιμή t̄ ανά ύψος → γραφική t̄ ως προς √h → ελάχιστα τετράγωνα: κλίση b = √(2/g) → g ± δg

Η αυτεπαγωγή του ηλεκτρομαγνήτη καθυστερεί την απελευθέρωση: η ευθεία δεν περνά από την αρχή — η τεταγμένη «μετρά» την καθυστέρηση t_0.

Άσκηση 2 · g με φυσικό εκκρεμές





ΝΟΜΟΣ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K_c^2 + L^2}{g\,L}} \qquad \frac{L\,T^2}{4\pi^2} = \frac{K_c^2}{g} + \frac{1}{g}\,L^2$$

ΜΕΤΡΑΤΕ

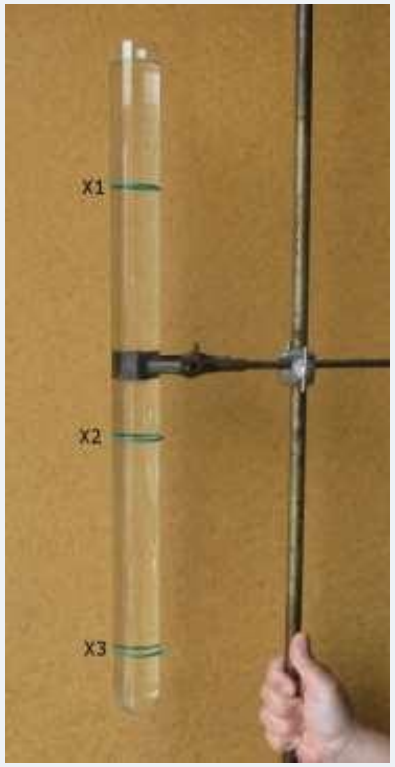
Μήκος H και διάμετρο της ράβδου · για 10 θέσεις του άξονα: L και χρόνο t για N ταλαντώσεις (T = t/N, δT = δt/N)

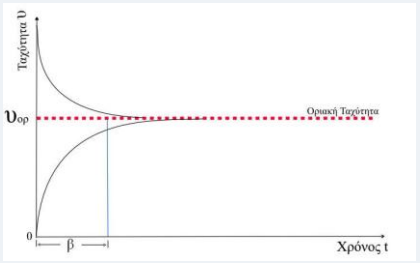
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Καμπύλη T(L) · ελάχιστα τετράγωνα στο y = LT²/4π² ως προς x = L²: κλίση 1/g, τεταγμένη Kc²/g → g ± δg, Kc ± δKc

Πλάτος ≤ 5° (στις 20° η g βγαίνει ~1,5% μικρότερη) · αρχή χρονομέτρησης σε μέγιστη απομάκρυνση · προσοχή στην καταμέτρηση των ταλαντώσεων.

Άσκηση 5 · Ιξώδες με πτώση σφαιρών





Σφαίρα σε γλυκερίνη: μετά από λίγο κινείται με σταθερή, οριακή ταχύτητα.

ΝΟΜΟΣ

$$\eta = \frac{2}{9}\,\frac{r^2\,(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)\,g}{\upsilon_{o\rho}}$$

ΜΕΤΡΑΤΕ

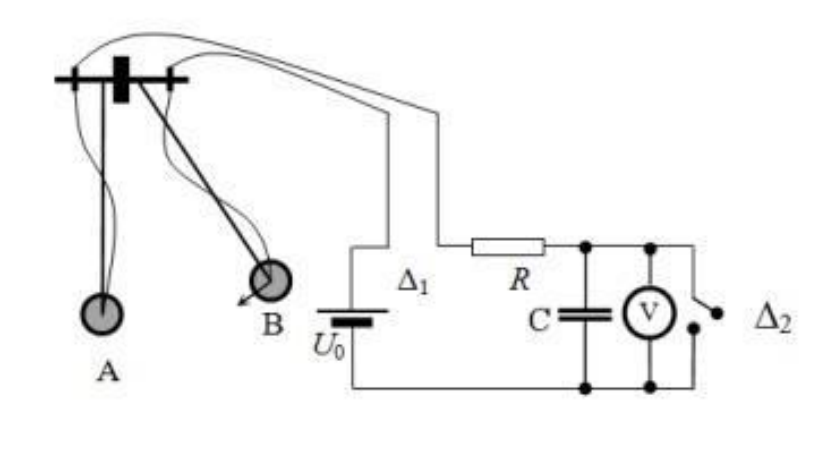
Διάμετρο 10 σιδερένιων σφαιρών (μικρόμετρο) · χρόνο πτώσης μεταξύ χαραγών · μάζα των 10 σφαιρών · πυκνότητα και θερμοκρασία της γλυκερίνης

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

r̄ ± δr, ῡ ± δυ, ρσ · πίνακας σχετικών σφαλμάτων: ποιο μέγεθος κυριαρχεί; → η ± δη

Το ιξώδες εξαρτάται έντονα από τη θερμοκρασία · ελέγξτε ότι η ταχύτητα είναι ήδη οριακή (ίδια σε S_1 και S_2) · αποφύγετε την παράλλαξη.

Άσκηση 6 · Κρούση δύο σφαιρών



C = 1 μF, R = 10 kΩ. Ο «διακόπτης» Δ_1 είναι οι ίδιες οι σφαίρες: κλείνει μόνο όσο εφάπτονται, και ο πυκνωτής φορτίζεται για χρόνο t_o.

ΝΟΜΟΣ

$$k = \left(1 - \frac{2\,u_A^{(n)}}{V_0}\right)^{1/n} \qquad t_0 = \frac{U_C}{U_0}\,RC \qquad t_0 \propto V_0^{-1/5}$$

ΜΕΤΡΑΤΕ

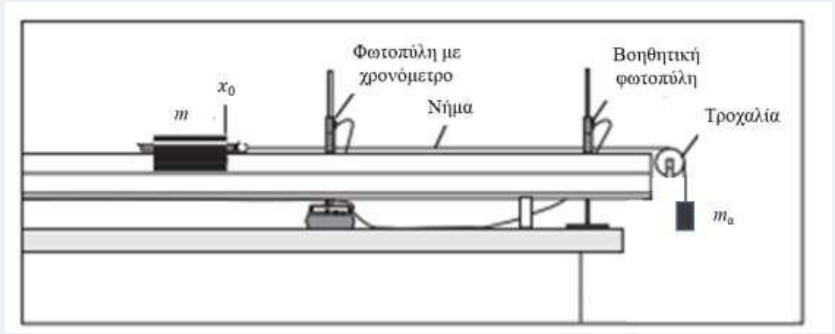
Περίοδο T (20 ταλαντώσεις) · εκτροπή s_B και πλάτος s_A μετά από 20 κρούσεις · τάση U_C για s_B = 2–20 cm (3 φορές) · U_o, R

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

υ = 2πs/T → k και % απώλεια κινητικής ενέργειας · t_o για κάθε V_o · γραφική t_o–V_o (θεωρία: $t_o \propto V_o^{-1/5}$) · F = Δ(mυ)/t_o

Μηδενίζετε τον πυκνωτή (Δ_2) πριν από κάθε κρούση · η $t_o = (U_C/U_o)RC$ ισχύει μόνο όταν $t_o \ll RC$.

Άσκηση 7 · Νόμοι της κίνησης με αεροτροχιά





ΝΟΜΟΣ

$$\gamma = \frac{B_\alpha}{m_\tau/2 + m + m_\alpha} \qquad \Delta E_k = \Delta U$$

ΜΕΤΡΑΤΕ

Χρόνους φωτοπυλών t_1, t_2 (GATE) και t_3 (PULSE), 2 φορές · ενεργό μήκος L του βαγονιού · μάζες m, mα (5 τιμές) · ύψος h και αποστάσεις d, D (κεκλιμένο)

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

$\upsilon_i = L/t_i$, $\gamma = (\upsilon_2 - \upsilon_1)/[t_3 + (t_2 - t_1)/2]$ · γ ως προς Βα: κλίση έναντι $1/(m_\tau/2 + m + m_\alpha)$ · ΔEk ως προς ΔU: κλίση 1

Προσεκτική οριζοντίωση (το βαγόνι δεν πρέπει να επιταχύνεται μόνο του) · σταθερή συνολική μάζα m + mα · μπορούμε να αγνοήσουμε τη μάζα της τροχαλίας;

Άσκηση 16 · Ροπή αδράνειας στερεών σωμάτων





ΝΟΜΟΣ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \;\Rightarrow\; I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \qquad F = \frac{D}{L}\,\varphi$$

ΜΕΤΡΑΤΕ

Δύναμη F για ϕ = 45°, 90°, …, 360° (δυναμόμετρο κάθετα στη ράβδο) · απόσταση L · χρόνο N ταλαντώσεων, 6 φορές, για δίσκο, κύλινδρο, σωλήνα, σφαίρα · μάζες και διαστάσεις

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

F ως προς ϕ (rad): ευθεία από την αρχή, b = D/L → D ± δD · Iπ ± δIπ από τη T · σύγκριση με την Iθ: είναι η διαφορά μικρότερη από το σφάλμα;

Γωνίες σε ακτίνια · το δυναμόμετρο πάντα κάθετα στη ράβδο · και η υποδοχή έχει ροπή αδράνειας.

03

Μέτρηση και σφάλματα

Τι σημαίνει «σφάλμα», από πού προέρχεται και γιατί πρέπει να το υπολογίζουμε

Τι ύψος έχει η πόρτα; Ποιος έχει δίκιο;

Για να αγοράσω πόρτα

2,2 m

σημαίνει

2,2 ± 0,1 m

2,1 έως 2,3 m

Για να την κατασκευάσω

221,6 cm

σημαίνει

221,60 ± 0,05 cm

221,55 έως 221,65 cm

Για… ποιο λόγο;

221,578420965 cm

σημαίνει

υπερβολική ακρίβεια

± 0,0000000005 cm

Και οι τρεις! Μέτρηση είναι η σύγκριση με ένα πρότυπο. Κάθε μέτρηση έχει μια ακρίβεια, που εκφράζεται μαθηματικά με το σφάλμα. Η μέγιστη δυνατή ακρίβεια δεν χρειάζεται πάντα — και κοστίζει.

ΟΡΙΣΜΟΣ

«Σφάλμα» δεν σημαίνει «λάθος»

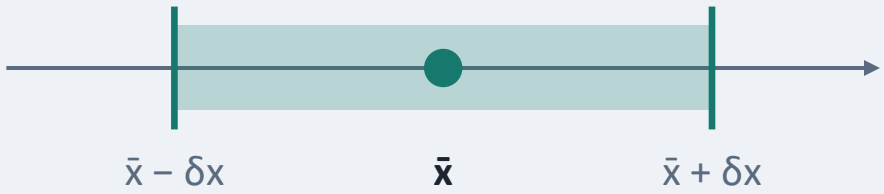
Στις επιστημονικές μετρήσεις, σφάλμα είναι η αναπόφευκτη αβεβαιότητα που συνοδεύει κάθε μέτρηση. Δεν εξαφανίζεται με περισσότερη προσοχή. Το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε: να είναι όσο μικρό είναι λογικό και να έχουμε αξιόπιστη εκτίμηση του μεγέθους του.

— κατά J. R. Taylor, An Introduction to Error Analysis

Ουσιαστικά δηλώνουμε: «η τιμή βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα στο διάστημα [x̄ − δx, x̄ + δx]».

ΚΑΘΕ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΓΡΑΦΕΤΑΙ

$$x = \bar{x} \pm \delta\bar{x}$$



- με μονάδες
- το σφάλμα δx > 0 έχει τις ίδιες μονάδες με το x
- σωστά στρογγυλοποιημένο (θα το δούμε)

Από πού προέρχονται τα σφάλματα;



Όργανα μέτρησης



Πειραματική διαδικασία και συνθήκες



Ελλιπής κατανόηση της Φυσικής

Συστηματικά και τυχαία σφάλματα συνυπάρχουν σχεδόν πάντα.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ

- μετατοπίζουν όλες τις μετρήσεις προς την ίδια κατεύθυνση
- δεν μειώνονται με επανάληψη
- εντοπίζονται με έλεγχο της διάταξης ή σύγκριση
- π.χ. όργανο που δεν μηδενίζει, λάθος βαθμονόμηση

ΤΥΧΑΙΑ

- διασπείρουν τις μετρήσεις και προς τις δύο κατευθύνσεις
- μειώνονται με περισσότερες μετρήσεις
- περιγράφονται στατιστικά
- π.χ. ανάγνωση κλίμακας, χρόνος αντίδρασης

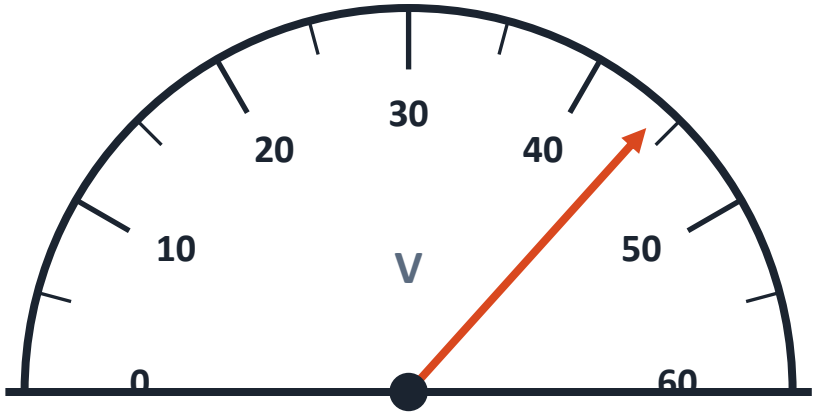
Τυχαίο σφάλμα: η ανάγνωση της κλίμακας



Μήπως 7; **ΟΧΙ** Μήπως 7,5; **ΟΧΙ** Μήπως 7,25; **ΟΧΙ**

Μεταξύ 7 και 7,5 — ή καλύτερα μεταξύ 7,1 και 7,5

$$7{,}3 \pm 0{,}2 \text{ cm}$$



Μήπως 40; 45; 50; **ΟΧΙ**

Μεταξύ 40 και 45 — ή καλύτερα μεταξύ 43 και 45

$$44 \pm 1 \text{ V}$$

Και τα δύο είναι τυχαία σφάλματα — σφάλματα ανάγνωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Συστηματικό σφάλμα: όλα «γέρνουν» μαζί

Χρονομέτρηση δρομέα 100 m

Αποτέλεσμα: 9,12 s — παγκόσμιο ρεκόρ!

Το χρονόμετρο καθυστερούσε να ξεκινήσει.

Πυκνότητα ενός υγρού

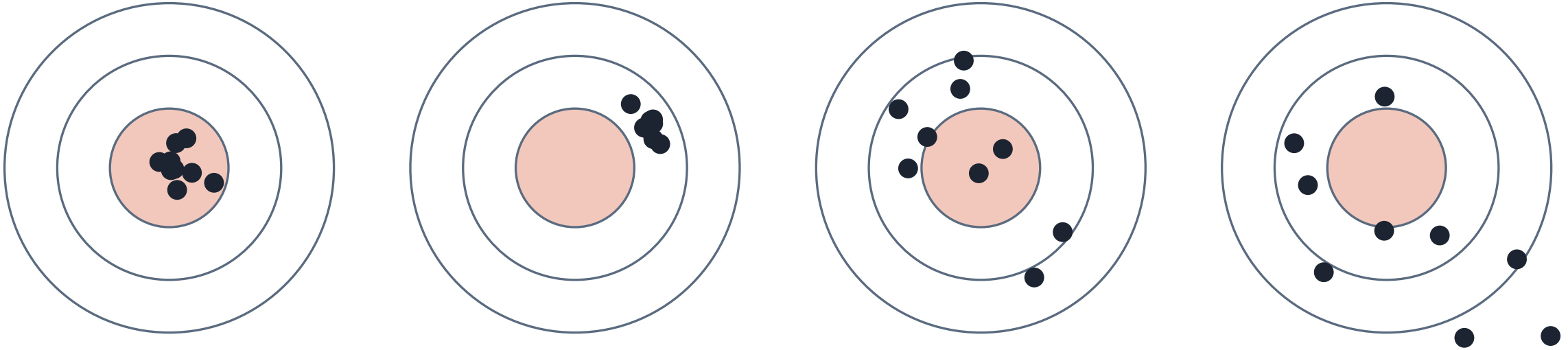
Αποτέλεσμα: 0,9897 g/cm³ — ποιο υγρό είναι;

Ξεχάσαμε να μετρήσουμε τη θερμοκρασία.

ΚΑΙ ΣΤΑ ΔΙΚΑ ΜΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ

- **Άσκ. 1** καθυστέρηση απελευθέρωσης του ηλεκτρομαγνήτη
- **Άσκ. 5** θερμοκρασία της γλυκερίνης
- **Άσκ. 7** κλίση της τροχιάς, μάζα τροχαλίας

Ακρίβεια και πιστότητα



Ακριβές και πιστό | Πιστό, όχι ακριβές | Ακριβές, όχι πιστό | Ούτε ακριβές ούτε πιστό

Ακρίβεια (accuracy): πόσο κοντά είμαστε στην πραγματική ή αποδεκτή τιμή. Μικρή ακρίβεια ⇒ μεγάλο συστηματικό σφάλμα.

Πιστότητα (precision): πόσο κοντά είναι οι μετρήσεις μεταξύ τους. Μικρή πιστότητα ⇒ μεγάλο τυχαίο σφάλμα.

Τυχαία σφάλματα και κατανομή Gauss

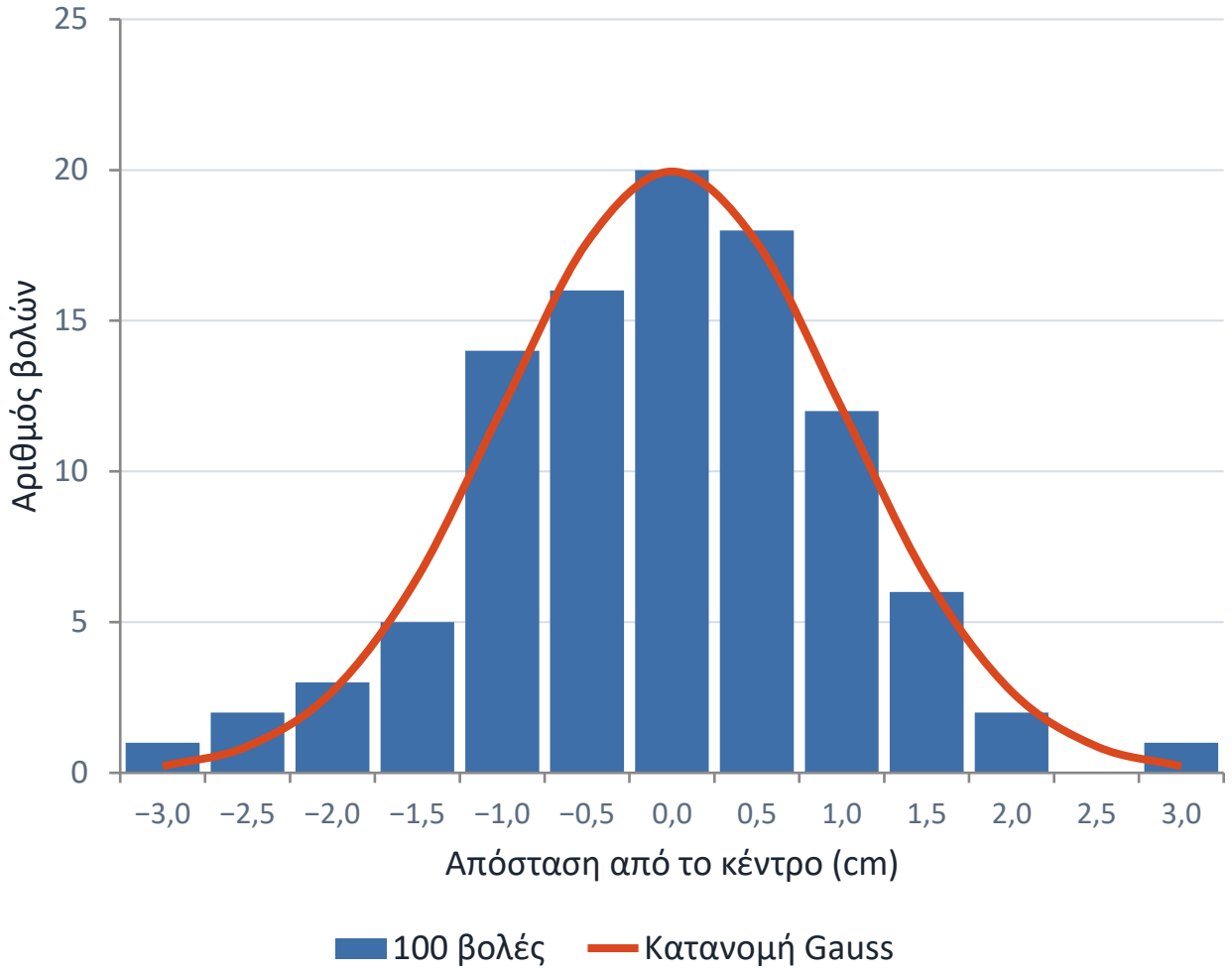
Ρίχνουμε 100 φορές ένα βελάκι στο 0, προσπαθώντας να κρατήσουμε τις συνθήκες σταθερές. Καταγράφουμε πού χτύπησε.

$$n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2}$$

≈ 68 % των μετρήσεων μέσα σε ±σ

≈ 95 % μέσα σε ±2σ

Τα τυχαία σφάλματα περιγράφονται από τη θεωρία πιθανοτήτων.



ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Γιατί πρέπει να υπολογίζουμε τα σφάλματα;

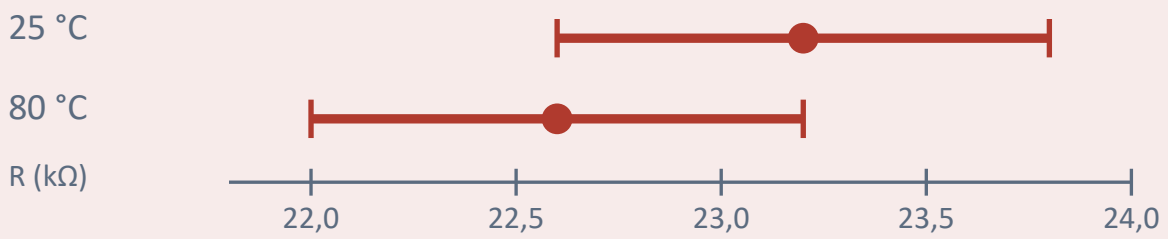
Θέλουμε να δούμε αν η αντίσταση ενός υλικού εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Μετράμε:

θ = 25 °C: R = 23,17 kΩ
θ = 80 °C: R = 22,61 kΩ

Τι συμπέρασμα βγάζουμε; Χωρίς σφάλματα: κανένα!

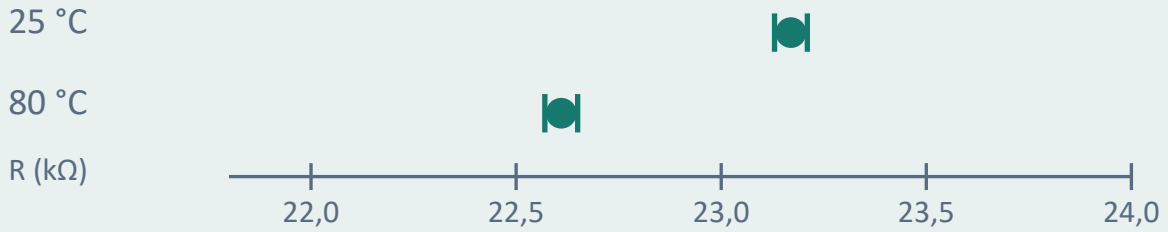
Σε κάθε πείραμα ο υπολογισμός των σφαλμάτων είναι απαραίτητος.

Με δR = 0,6 kΩ: 23,2 ± 0,6 και 22,6 ± 0,6 kΩ



Τα διαστήματα επικαλύπτονται → δεν βγαίνει συμπέρασμα

Με δR = 0,04 kΩ: 23,17 ± 0,04 και 22,61 ± 0,04 kΩ



Τα διαστήματα απέχουν → η αντίσταση μειώνεται

04

Μέση τιμή, στρογγυλοποίηση, διάδοση

Από τις «ωμές» μετρήσεις στο τελικό αποτέλεσμα x ± δx

Μέση τιμή και σφάλμα μέσης τιμής

Μετράμε N φορές την ίδια ποσότητα x, στις ίδιες συνθήκες, και βρίσκουμε τις τιμές x_1, x_2, …, x_N.

Καλύτερη εκτίμηση: η μέση τιμή

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Διασπορά μίας μέτρησης (τυπική απόκλιση)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Σφάλμα της μέσης τιμής

$$\delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

$$x = \bar{x} \pm \delta\bar{x}$$

Η σ δεν μικραίνει με περισσότερες μετρήσεις — η δx̄ ναι: **4 φορές περισσότερες μετρήσεις → μισό σφάλμα.**

Παράδειγμα: 9 μετρήσεις περιόδου εκκρεμούς

T_i (s)	$\bar{T} - T_i$ (s)	$(\bar{T} - T_i)^2$ (s^2)
1,14	0,17	0,0289
1,22	0,09	0,0081
1,28	0,03	0,0009
1,34	−0,03	0,0009
1,45	−0,14	0,0196
1,38	−0,07	0,0049
1,30	0,01	0,0001
1,38	−0,07	0,0049
1,30	0,01	0,0001
Σ = 11,79	**0,00**	**Σ = 0,0684**

$$\bar{T} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} T_i = \frac{11{,}79\ \text{s}}{9} = 1{,}31\ \text{s}$$

$$\delta\bar{T} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{T} - T_i)^2}{9 \cdot 8}} = \sqrt{\frac{0{,}0684}{72}}\ \text{s} = 0{,}0308\ldots\ \text{s}$$

Στρογγυλοποίηση: πρώτο σημαντικό ψηφίο του σφάλματος = 3 → κρατάμε ένα ψηφίο → 0,03 s · η μέση τιμή στο ίδιο δεκαδικό → 1,31 s

$$T = 1{,}31 \pm 0{,}03\ \text{s}$$

Στρογγυλοποίηση: οι κανόνες

Η αριθμομηχανή δίνει:

$$\bar{x} = 7{,}268666\ldots \qquad \delta\bar{x} = 0{,}046333\ldots$$

1. **Πρώτα το σφάλμα:** 1 σημαντικό ψηφίο — 2 αν το πρώτο είναι 1 ή 2.
2. **Μετά η τιμή:** στην ίδια δεκαδική θέση με το σφάλμα.
3. **Στις ενδιάμεσες πράξεις:** κρατάμε τουλάχιστον ένα ψηφίο παραπάνω· στρογγυλοποιούμε μόνο στο τέλος.
4. **Ο κανόνας:** αν το επόμενο ψηφίο είναι ≥ 5, αυξάνουμε κατά 1· αλλιώς το αφήνουμε.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

δx̄ = 0,046333… → **0,05**
(πρώτο σημαντικό ψηφίο: 4 → κρατάμε ένα)

x̄ = 7,268666… → **7,27**
(δύο δεκαδικά, όπως το σφάλμα)

$$x = 7{,}27 \pm 0{,}05$$

Στρογγυλοποίηση: παραδείγματα

x	δx	δx στρογγυλοποιημένο	Αποτέλεσμα
32,0319	0,0428	0,04	**32,03 ± 0,04**
0,017365	0,000387	0,0004	**0,0174 ± 0,0004**
13,8476	0,13856	0,14	**13,85 ± 0,14**
1256,45	47,323	50	**$(1{,}26 \pm 0{,}05) \cdot 10^{3}$**
3017563,2	2667,178	2700	**$(3{,}0176 \pm 0{,}0027) \cdot 10^{6}$**
6,300	0,00715	0,007	**6,300 ± 0,007**

Προσοχή: οι κανόνες ισχύουν για ΟΛΑ τα πειραματικά αποτελέσματα. Για πολύ μεγάλους ή μικρούς αριθμούς, χρησιμοποιούμε επιστημονική γραφή με κοινή δύναμη του 10.

Σημαντικά ψηφία

ΠΟΙΑ ΨΗΦΙΑ ΕΙΝΑΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ;

Όλα τα μη μηδενικά	**4,73 → 3**
Τα ενδιάμεσα μηδενικά	**6,051 → 4**
ΟΧΙ τα αρχικά μηδενικά	**0,0029 → 2**
Τα τελικά μηδενικά σε δεκαδικό	**2,500 → 4**
Τελικά μηδενικά ακέραιου: ασαφή	**1500 → $1{,}50\cdot10^{3}$ (3)**

ΠΡΑΞΕΙΣ

Πρόσθεση – αφαίρεση
όσα δεκαδικά έχει ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά
0,234 + 1,3 = 1,5 (όχι 1,534)

Πολλαπλασιασμός – διαίρεση
όσα σημαντικά ψηφία έχει ο αριθμός με τα λιγότερα
0,234 × 2,0 = 0,47 (όχι 0,468)

Όταν το σφάλμα είναι γνωστό, αποφασίζει εκείνο πόσα ψηφία κρατάμε.

Σφάλμα ανάγνωσης και σφάλμα οργάνου

ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΟΡΓΑΝΟ

Συνήθως το μισό της μικρότερης υποδιαίρεσης (για ευκολία, συχνά ολόκληρη η υποδιαίρεση).



$$36{,}0 \pm 0{,}5 \text{ mm}$$

ΨΗΦΙΑΚΟ ΟΡΓΑΝΟ

Μία μονάδα του τελευταίου ψηφίου — εκτός αν ο κατασκευαστής δίνει κάτι άλλο.



$$12{,}34 \pm 0{,}01 \text{ V}$$

Σφάλμα οργάνου (κατασκευαστή): γραμμένο πάνω στο όργανο ή στα έγγραφά του. Κατά κανόνα μικρότερο από το σφάλμα ανάγνωσης.

Σφάλμα παράλλαξης: κοιτάμε την κλίμακα πλάγια. Λειτουργεί σαν συστηματικό — το αποφεύγουμε κοιτάζοντας κάθετα.

Παγίδα: πολλές μετρήσεις με το ίδιο όργανο χαμηλής ακρίβειας

Με το γνωστό μας μέτρο κάποιος μετρά 6 φορές το μήκος ενός αντικειμένου (σε cm):

32,6	**32,6**	**32,6**	**32,5**	**32,6**	**32,6**

Υπολογίζει αμέσως μέση τιμή και σφάλμα μέσης τιμής:

$$L = 32{,}583 \pm 0{,}017 \text{ cm}$$

ΛΑΘΟΣ

Αν όλες οι τιμές ήταν 32,6 (καθόλου απίθανο), θα έβρισκε σφάλμα 0!

Όταν σε μια μέτρηση υπάρχουν περισσότερα από ένα σφάλματα, κρατάμε το μεγαλύτερο.

Το μέτρο έχει σφάλμα ανάγνωσης 0,1 cm, που δεν «φεύγει» με την επανάληψη. Οι πολλαπλές μετρήσεις εδώ δεν προσφέρουν τίποτα.

$$L = 32{,}6 \pm 0{,}1 \text{ cm}$$

ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ

είναι μεγάλο το 0,004;

Σχετικό σφάλμα:

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{|\bar{x}|} \qquad (\times 100\%)$$

Το σφάλμα μόνο του δεν λέει αν η μέτρηση είναι καλή. Τη σύγκριση τη κάνει το σχετικό σφάλμα — καθαρός αριθμός, συχνά σε %.

$$\frac{0{,}004}{0{,}020} = 20\%$$ **κακή μέτρηση**

$$\frac{0{,}004}{400} = 0{,}001\%$$ **εξαιρετική**

Για σκέψη: μπορεί ένα σχετικό σφάλμα 120% ή και 500% να μη μας ανησυχεί; (Υπόδειξη: σκεφτείτε μια ποσότητα που αναμένεται να είναι μηδέν — π.χ. η τεταγμένη μιας ευθείας.)

Διάδοση σφαλμάτων: ο γενικός τύπος

Μετράμε άμεσα x, y, z, … και υπολογίζουμε ένα παράγωγο μέγεθος u = f(x, y, z, …), π.χ. ταχύτητα, επιτάχυνση, ιξώδες. Πόσο είναι το σφάλμα του;

$$u = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$$

$$\delta u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z\right)^2 + \cdots}$$

Οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στις μέσες τιμές.

Ισχύει για ανεξάρτητα σφάλματα (αλλιώς χρειάζονται επιπλέον όροι).

Γωνίες πάντα σε ακτίνια στις παραγώγους και στα σφάλματα.

Μερική παράγωγος ∂f/∂x: παραγωγίζουμε ως προς x, θεωρώντας τις άλλες μεταβλητές σταθερές.

$$f = \frac{x^2}{y}: \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Χρήσιμες συντομεύσεις

Άθροισμα, διαφορά: προσθέτουμε απόλυτα σφάλματα «τετραγωνικά»	$u = x \pm y \;\Rightarrow\; \delta u = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$
Πολλαπλασιασμός με σταθερά	$u = c\,x \;\Rightarrow\; \delta u = \lvert c\rvert\,\delta x$
Γινόμενο, πηλίκο: προσθέτουμε σχετικά σφάλματα «τετραγωνικά»	$u = x\,y,\;\; u = \dfrac{x}{y} \;\Rightarrow\; \dfrac{\delta u}{\lvert u\rvert} = \sqrt{\left(\dfrac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta y}{y}\right)^2}$
Δύναμη: το σχετικό σφάλμα πολλαπλασιάζεται με τον εκθέτη	$u = x^n \;\Rightarrow\; \dfrac{\delta u}{\lvert u\rvert} = \lvert n\rvert\,\dfrac{\delta x}{\lvert x\rvert}$
Γενικά για γινόμενα δυνάμεων	$u = x^a y^b \;\Rightarrow\; \dfrac{\delta u}{\lvert u\rvert} = \sqrt{\left(a\,\dfrac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(b\,\dfrac{\delta y}{y}\right)^2}$

Με σχετικά σφάλματα φαίνεται αμέσως ποιο μέγεθος «κυριαρχεί» στο τελικό σφάλμα — αυτό ακριβώς ζητά η Άσκηση 5.

Παράδειγμα: επιτάχυνση από s και t

$$a = \frac{2s}{t^2} \qquad s = 35{,}20 \pm 0{,}10\ \text{m} \qquad t = 12{,}0 \pm 0{,}5\ \text{s}$$

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{2}{t^2} = \frac{2}{(12{,}0)^2} = 0{,}01389\ \text{s}^{-2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{4s}{t^3} = -\frac{4 \cdot 35{,}2}{(12{,}0)^3} = -0{,}0815\ \text{m/s}^3$$

$$\delta a = \sqrt{(0{,}01389 \cdot 0{,}10)^2 + (0{,}0815 \cdot 0{,}5)^2} = 0{,}0408\ \text{m/s}^2$$

$$a = 0{,}49 \pm 0{,}04\ \text{m/s}^2$$

ΤΟ ΙΔΙΟ ΜΕ ΣΧΕΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

$$\frac{\delta a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\delta s}{s}\right)^2 + \left(2\,\frac{\delta t}{t}\right)^2} = \sqrt{0{,}0028^2 + 0{,}083^2} \approx 0{,}083$$

δs/s = 0,3 %

2·δt/t = 8,3 %

Το t κυριαρχεί· το σφάλμα του s σχεδόν δεν παίζει ρόλο. Για καλύτερο αποτέλεσμα: καλύτερη μέτρηση χρόνου!

Παράδειγμα: όταν υπάρχει γωνία

$$k = \frac{5}{9}\, r\, \sin\theta \qquad r = 0{,}820 \pm 0{,}020 \text{ cm} \qquad \theta = 32{,}0° \pm 1{,}0°$$

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{5}{9}\sin\theta = 0{,}294 \qquad \frac{\partial k}{\partial \theta} = \frac{5}{9}\, r\cos\theta = 0{,}386 \text{ cm/rad}$$

$$\delta k = \sqrt{(0{,}294 \cdot 0{,}020)^2 + (0{,}386 \cdot 0{,}01745)^2} = 0{,}0090 \text{ cm}$$

$$k = 0{,}241 \pm 0{,}009 \text{ cm}$$

ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΠΑΝΤΑ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΑ

$$\delta\theta = 1{,}0° = 0{,}01745 \text{ rad}$$

Αν βάλουμε δθ = 1,0 (μοίρες!) στον τύπο:

$$\delta\theta = 1{,}0 \;\Rightarrow\; \delta k = 0{,}39 \text{ cm}\ !$$

Σφάλμα μεγαλύτερο από την ίδια την τιμή — παράλογο.

Κόλπο: μετράμε πολλές περιόδους μαζί

Μία περίοδος

Χρόνος αντίδρασης ≈ 0,2 s, περίοδος ≈ 1,2 s

⇒ σχετικό σφάλμα ≈ 17 %

Είκοσι περίοδοι

Μετράμε x = 20T = 24,8 s με το ίδιο δx = 0,2 s

⇒ σχετικό σφάλμα ≈ 0,8 %

$$T = \frac{x}{20} \quad \Rightarrow \quad \delta T = \frac{\delta x}{20} = \frac{0{,}2\ \text{s}}{20} = 0{,}010\ \text{s}$$

$$T = 1{,}240 \pm 0{,}010\ \text{s}$$

Γιατί 20 και όχι 100 περίοδοι, ώστε το σφάλμα να γίνει «πρακτικά» 0; (απόσβεση, λάθη καταμέτρησης, χρόνος…) — Το ίδιο κόλπο χρησιμοποιείτε στις Ασκήσεις 2, 6 και 16.

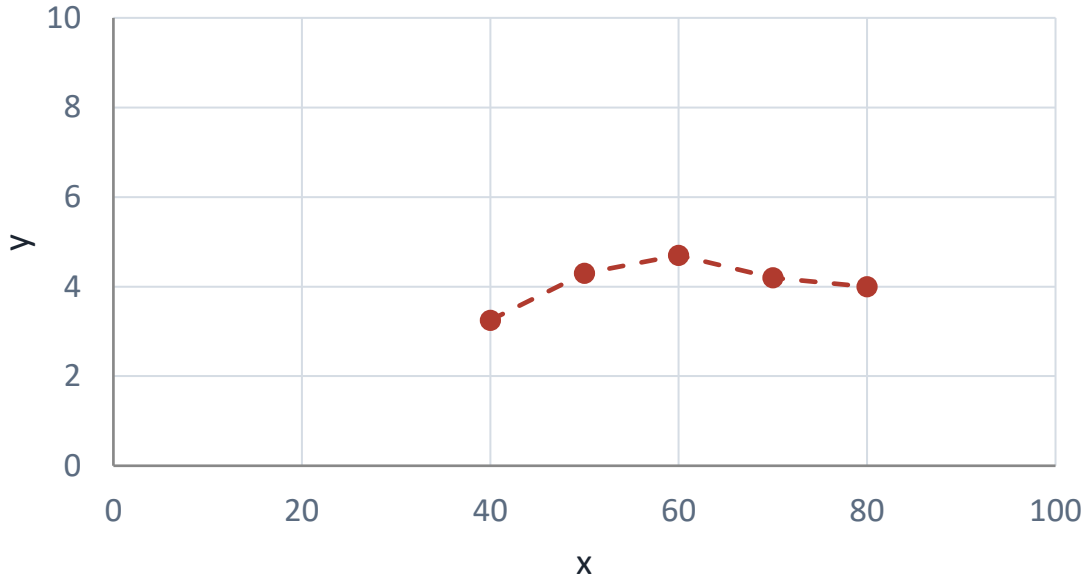
05

Γραφικές παραστάσεις και ελάχιστα τετράγωνα

Πώς σχεδιάζουμε, πώς «ευθειοποιούμε» έναν νόμο και πώς βρίσκουμε την καλύτερη ευθεία

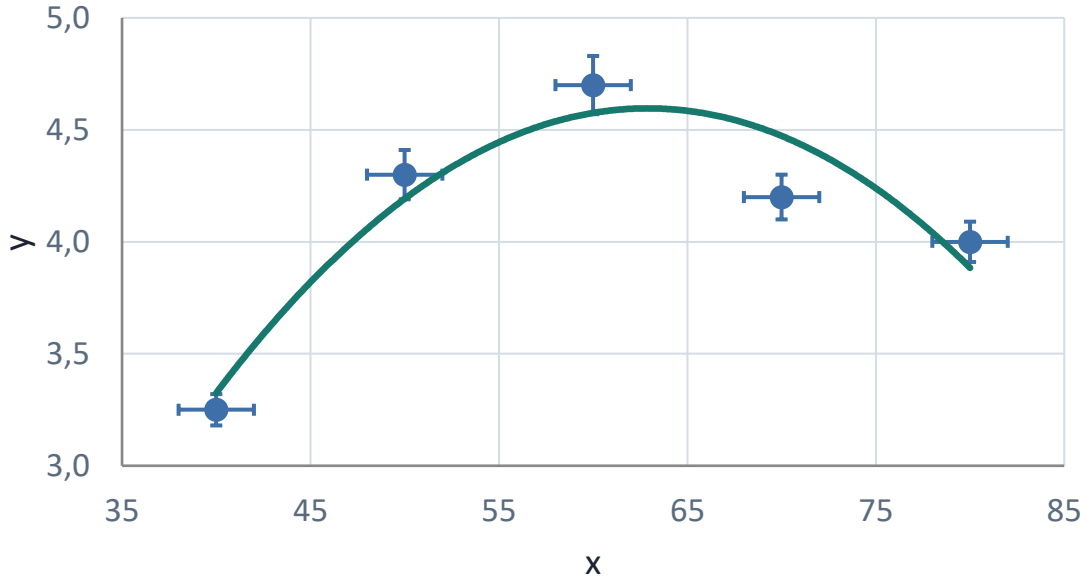
Η ίδια μέτρηση, δύο γραφικές παραστάσεις

✗ ΛΑΘΟΣ



- Τεθλασμένη γραμμή που «ενώνει» τα σημεία
- Κλίμακα που αφήνει άδειο το μεγαλύτερο μέρος του χαρτιού
- Σημεία χωρίς σφάλματα

✓ ΣΩΣΤΟ



- Κάθε σημείο με τα σφάλματά του
- Ομαλή καμπύλη μέσα από την περιοχή των σφαλμάτων — όχι από τα σημεία
- Κλίμακα που γεμίζει το χαρτί (~½ σελίδα A4)

Κανόνες για γραφικές στο χαρτί μιλιμετρέ



Όλες οι γραφικές γίνονται σε χαρτί μιλιμετρέ

και με το χέρι — ο υπολογιστής μόνο για έλεγχο



Άξονες: σύμβολο και μονάδα

π.χ. t (s), √h (m^½) — όχι οι τιμές των σημείων πάνω στους άξονες



Κλίμακα: 1, 2 ή 5 μονάδες ανά cm

όχι 3 ή 7 — αλλιώς η ανάγνωση γίνεται βασανιστήριο



Ο άξονας δεν ξεκινά υποχρεωτικά από το 0

εκτός αν θέλουμε να διαβάσουμε την τεταγμένη (π.χ. Άσκηση 1)

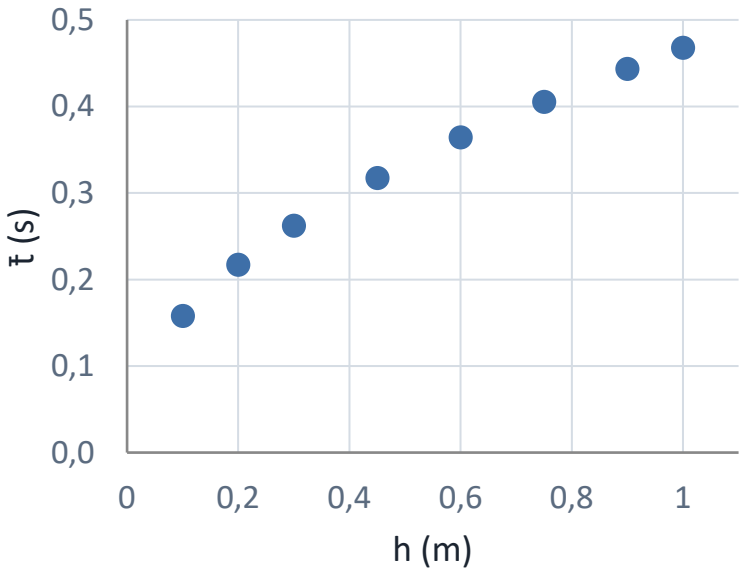


Πίνακες πάντα, με μονάδες στην κεφαλίδα

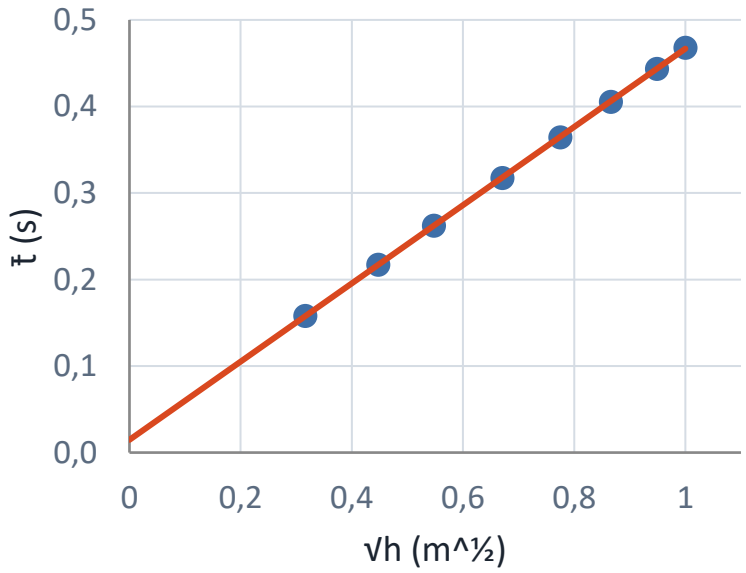
A (m) · δA (m) · B (s) · δB (s) · x (m/s) · δx (m/s)

Γραμμικοποίηση: κάνουμε τον νόμο ευθεία

Καμπύλη: δύσκολο να ελεγχθεί



Ευθεία: ελέγχεται με μια ματιά



$$\bar{t} = A + B\sqrt{h}$$

κλίση B = √(2/g)

$$g = \frac{2}{B^2} = 9{,}78 \pm 0{,}04 \text{ m/s}^2$$

τεταγμένη = καθυστέρηση

$$t_0 = 14{,}6 \pm 0{,}7 \text{ ms}$$

Απευθείας από h = ½gt² (h = 1 m): g = 9,14 m/s² — λάθος 7%, γιατί ο μετρούμενος χρόνος περιέχει την καθυστέρηση.

Από την κλίση: g = 9,78 ± 0,04 m/s² — η σταθερή καθυστέρηση μετακινεί την ευθεία, αλλά δεν αλλάζει την κλίση.

Γραμμικοποίηση στις ασκήσεις σας

Άσκηση	Νόμος	y	x	Κλίση B	Τεταγμένη A
1	$h = \frac{1}{2}gt^2$	$\bar{t}$	$\sqrt{h}$	$\sqrt{2/g}$	t_0
2	$T = 2\pi\sqrt{\frac{K_c^2+L^2}{gL}}$	$LT^2/4\pi^2$	L^2	$1/g$	K_c^2/g
6	$t_0 = c\,V_0^{-1/5}$	$\ln t_0$	$\ln V_0$	$-1/5$	$\ln c$
7α	$\gamma = \frac{B_\alpha}{m_\tau/2+m+m_\alpha}$	γ	B_α	$1/(m_\tau/2+m+m_\alpha)$	0
7β	$\Delta E_k = \Delta U$	ΔE_k	ΔU	1	0
16	$F = \frac{D}{L}\,\varphi$	F	φ (rad)	D/L	0

Στην Άσκηση 6 η γραφική t_0–V_0 ζητείται απευθείας· σε λογαριθμικούς άξονες γίνεται ευθεία με κλίση −1/5, εύκολος έλεγχος του εκθέτη. Στην 16 η ευθεία περνά από την αρχή (y = Bx).

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Από Ν ζεύγη (x_i, y_i) που αναμένουμε να ακολουθούν την $y = A + B\,x$

η μέθοδος δίνει την ευθεία που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων — η πιο απλή μέθοδος «μηχανικής μάθησης».

$$\Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$

$$B = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - A - B\,x_i)^2}{N-2}}$$

$$\delta A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \qquad \delta B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$y = B\,x: \quad B = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - B x_i)^2}{N-1}}, \quad \delta B = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

Παράδειγμα: σταθερά ελατηρίου

F (N)	x (cm)
5	3,5
10	5,2
15	6,3
20	8,0
25	9,1
30	10,9

δF = 1 N, δx = 0,05 cm

$$F = a_0 + k\,x \quad \text{(y = F, x = x)}$$

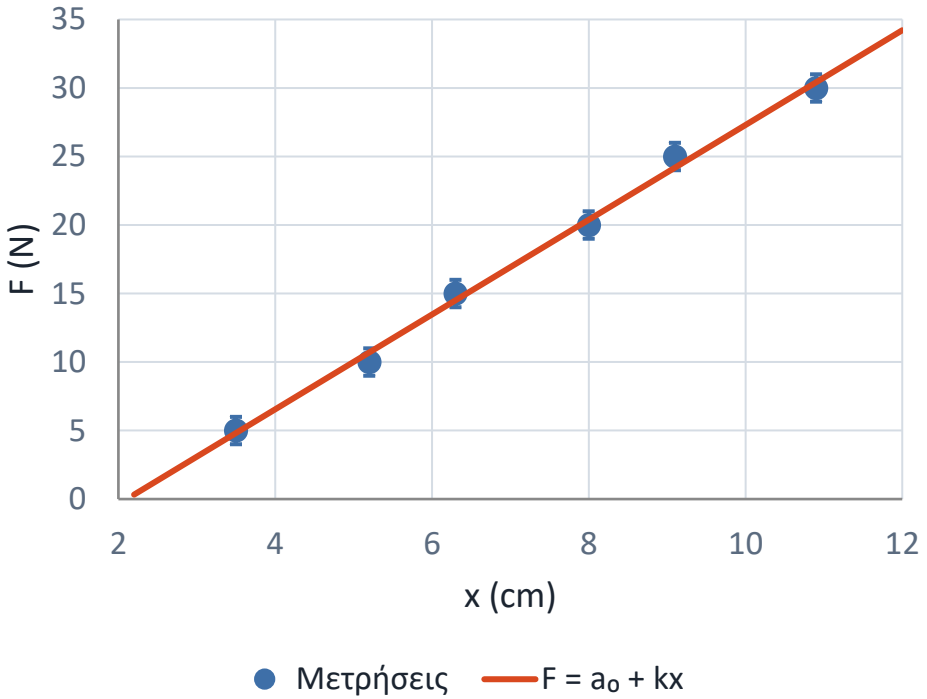
$$\sum x_i = 43{,}0 \quad \sum y_i = 105 \quad \sum x_i^2 = 344{,}6$$

$$\sum x_i y_i = 878{,}5 \quad \Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = 218{,}6$$

$$a_0 = -7{,}3 \pm 0{,}8 \text{ N}$$

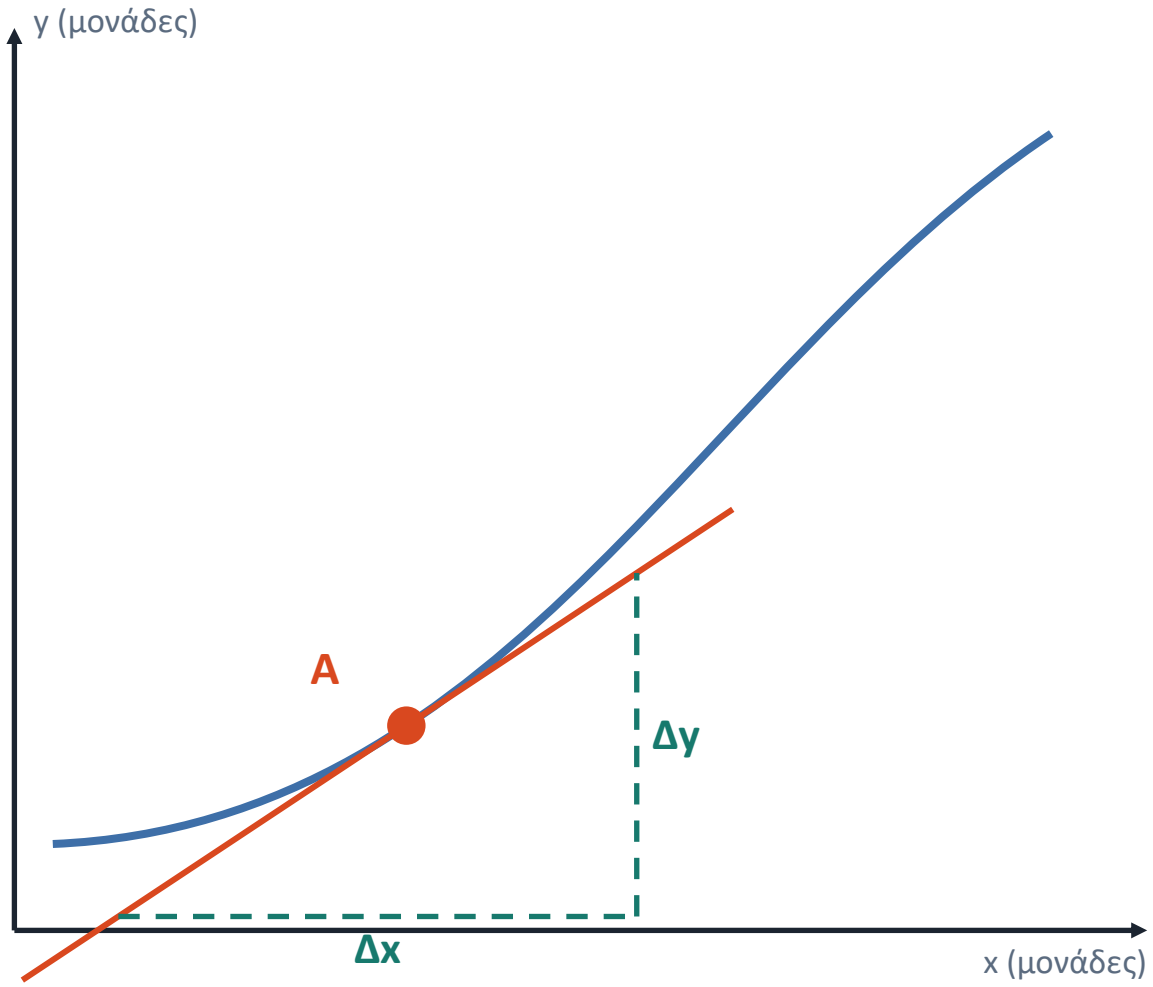
$$k = 3{,}46 \pm 0{,}11 \text{ N/cm}$$

σ_y = 0,66 N → δa_0 = 0,83 N, δk = 0,109 N/cm



Σχεδίαση: σημεία με τα σφάλματά τους · δύο σημεία της y = A + Bx, κοντά στα άκρα, ορίζουν την ευθεία · έλεγχος: αν η ευθεία δεν «πέφτει» ανάμεσα στα σημεία, κάπου υπάρχει λάθος στις πράξεις.

Κλίση καμπύλης σε ένα σημείο: δεν είναι γωνία!



1. Στο σημείο Α φέρνουμε με το χέρι την εφαπτομένη.
2. Με δύο απομακρυσμένα σημεία της εφαπτομένης σχηματίζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές παράλληλες στους άξονες.
3. Με τις κλίμακες των αξόνων διαβάζουμε x_1, x_2, y_1, y_2 — με μονάδες!

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Όχι K = tanφ! Δύο φοιτητές με διαφορετική κλίμακα μετρούν 45° και 30° για την ίδια ευθεία. Ποιος έχει δίκιο; Κανένας.

Συμφωνεί το αποτέλεσμα με τη θεωρία;

Συγκρίνουμε τη διαφορά από την αποδεκτή τιμή x_0 με το σφάλμα δx:

$|x - x_0| \le \delta x$

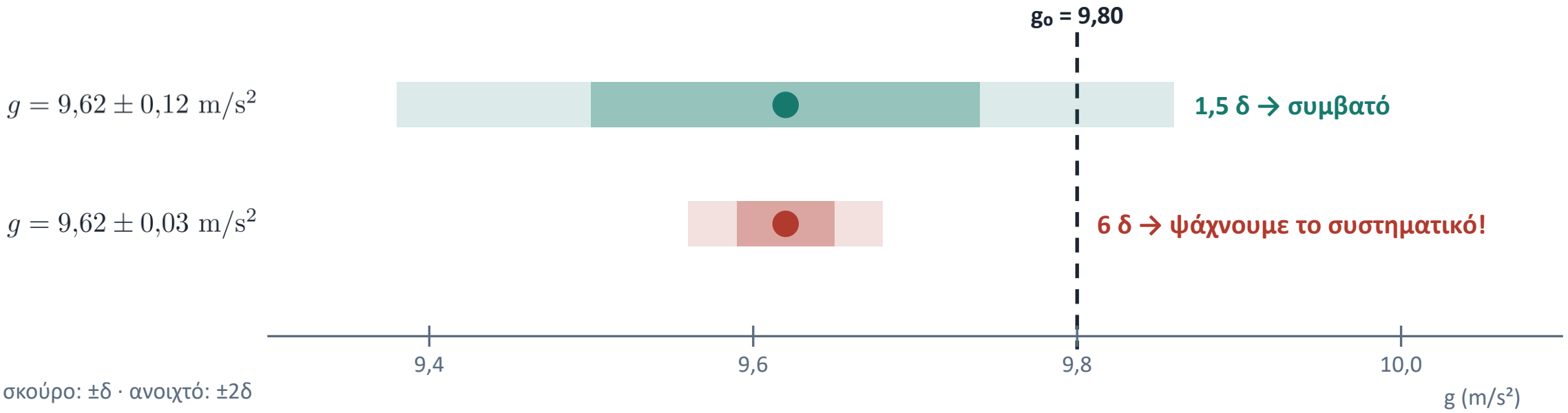
πολύ καλή συμφωνία

$|x - x_0| \le 2\delta x$

αποδεκτή συμφωνία

$|x - x_0| > 2\delta x$

ύποπτο· πάνω από 3δx σχεδόν σίγουρα συστηματικό σφάλμα ή λάθος μοντέλο



σκούρο: ±δ · ανοιχτό: ±2δ

Συμβουλές για μικρότερα τυχαία σφάλματα

Μήκος με μέτρο

Το ένα άκρο του αντικειμένου «ακριβώς» σε μια ευκρινή υποδιαίρεση.

Τάση και ένταση

Ρυθμίζουμε ώστε το ένα μέγεθος να παίρνει «στρογγυλές» τιμές.

Περίοδος εκκρεμούς

Ξεκινάμε και σταματάμε τη χρονομέτρηση στο ίδιο, ευδιάκριτο σημείο της ταλάντωσης.

Πολλές περίοδοι μαζί

Μετράμε N περιόδους και διαιρούμε με N.

Συστηματικά σε κάθε βήμα

Υπάρχουν; Πώς εξουδετερώνονται, πειραματικά ή θεωρητικά;

Τυχαία σε κάθε βήμα

Σφάλμα κατασκευαστή, ανάγνωσης, μέσης τιμής (αν υπάρχει).

06

Προετοιμασία και αναφορές

Τι κάνετε πριν από κάθε άσκηση και πώς γράφετε την εργασία σας

Πριν από κάθε εργαστήριο



Διαβάζετε ΟΛΟΚΛΗΡΗ την άσκηση

και τη θεωρία της: από το pdf του φυλλαδίου, από το βιβλίο σας ή από άλλες πηγές



Ετοιμάζετε από πριν τους πίνακες μετρήσεων

ξέρετε τι θα μετρήσετε, με ποιο όργανο και με τι σφάλμα



Φέρνετε

αριθμομηχανή, χαρτί μιλιμετρέ, χάρακα, μολύβι



Ακολουθείτε τις οδηγίες του επιβλέποντα

μπορεί να σας ζητήσει κάτι διαφορετικό από το φυλλάδιο

ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Πώς γράφουμε την αναφορά

1 Θεωρία

σύντομα, με δικά σας λόγια

2 Πειραματική διάταξη

τι χρησιμοποιήσατε και πώς

3 Μετρήσεις

πίνακες με μονάδες και σφάλματα

4 Επεξεργασία και αποτελέσματα

κάθε αποτέλεσμα ως $x \pm \delta x$

5 Σχολιασμός

σύγκριση με τη θεωρία, πηγές σφαλμάτων

6 Απαντήσεις

στις ερωτήσεις του φυλλαδίου και του επιβλέποντα

Αν το πείραμα έχει δύο μέρη, τα βήματα 3–5 επαναλαμβάνονται για το καθένα.

Η συνέχεια… στο εργαστήριο

Ιωάννης Θεοδώνης · Γραφείο κτήριο Β ΣΕΜΦΕ 101 Γρ. 1ος όροφος
ytheod@mail.ntua.gr