

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2
ΣΕΜΦΕ, Μαθηματική Ανάλυση I, 2025

Άσκηση 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν η (a_n^2) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.
2. Αν $a_n^2 \rightarrow 0$ τότε $a_n \rightarrow 0$.
3. Αν $\lim_n a_n = 1$ τότε $\lim_n a_n^n = 1$.
4. Αν $0 < a_n < 1$ τότε $a_n^n \rightarrow 0$.
5. Αν $1 \leq a_n \leq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$.
6. Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν συγκλίνει.

Άσκηση 2. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

(α) $\frac{na + (-1)^n}{n}$

(β) $\frac{\sin n}{n}$

(γ) $\frac{(2 - \frac{1}{n})^3}{7 - \frac{1}{n}}$

(δ) $\frac{3 + (0.5)^n}{5 + 3(0.9)^n}$

(ε) $a_n = \frac{4n^2 - n + 2}{n^2 + 7n - 3}$

(ζ) $\lim_n \frac{n!}{n^n}$.

Άσκηση 3. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Άσκηση 4. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, όπου $0 \leq a \leq b \leq c$.

Άσκηση 5. Βρείτε το όριο της ακολουθίας $\sqrt[n]{n^2 + n + 1}$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n^3]{1^{n^2} + 2^{n^2} + \dots + n^{n^2}}$.

Άσκηση 7. Έστω $x_n \rightarrow x$ και έστω $a < b$ με $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $x_n \in (a, b)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών (αντίστοιχα αρρήτων).

Άσκηση 9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι το A περιέχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ που τείνει στο $+\infty$. (Υπενθυμίζουμε ότι $a_n \rightarrow +\infty$ αν $\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n > M$, για όλα τα $n \geq n_0$).

Άσκηση 10. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $a_n \rightarrow a$.

(β) Για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $N_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \epsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Άσκηση 11. Έστω $(a_n), (b_n)$ δύο ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ που διαφέρουν σε πεπερασμένο πλήθος όρων. Αν $a_n \rightarrow a$ δείξτε ότι $b_n \rightarrow a$.

Άσκηση 12. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $a_n \rightarrow a$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n = a$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Άσκηση 13. Έστω (a_n) ακολουθία.

(α) Δείξτε ότι $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n - a \rightarrow 0$.

(β) Δείξτε ότι $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$.

(γ) Δείξτε ότι $a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$. Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή αν $a \neq 0$?

Άσκηση 14. Έστω $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι $a_n \rightarrow a > 0$. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$.

Άσκηση 15. (α) Αν $a_n \rightarrow a < 1$ δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (a, 1)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n < \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$.

(β) Αν $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sqrt[n]{b_n} \rightarrow b < 1$ δείξτε ότι $b_n \rightarrow 0$.

(γ) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $a_n = \frac{n^5}{2^n}$.

(δ) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (b_n) με $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $b_n \rightarrow 0$ αλλά $\sqrt[n]{b_n} \rightarrow 1$.

Άσκηση 16. Αποδείξτε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\frac{m^n}{n!} \rightarrow 0$.

Άσκηση 17. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό.

(α) Αν το A είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $a_n \rightarrow \sup A$.

(β) Αντίστοιχα αν το A είναι κάτω φραγμένο δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A τέτοια ώστε $a_n \rightarrow \inf A$.

Άσκηση 18. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και έστω $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A . Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(α) Το M είναι το supremum του A .

(β) Υπάρχει ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \rightarrow M$.

Άσκηση 19. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει τότε η ακολουθία $b_n = a_{2n} - a_{2n-1}$ συγκλίνει στο 0.

2. Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ και $a_{3n} = 1$ τότε $a = 1$.

3. Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < \dots$ τέτοια ώστε η ακολουθία $a_n = \cos k_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 20. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών που να είναι γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 21. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία και έστω (a_{k_n}) μια υπακολουθία της.

(α) Δείξτε ότι η (a_{k_n}) και η (a_n) έχουν κοινά άνω φράγματα.

(β) Δείξτε ότι αν η (a_{k_n}) συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει $\lim a_n = \lim a_{k_n}$.

Άσκηση 22. Έστω $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (α) Δείξτε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και εξηγήστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα. (β) Βρείτε το $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ και δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

Άσκηση 23. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών

$$(\alpha) \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (\beta) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (\gamma) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad (\delta) \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{2n^2}$$

Άσκηση 24. Έστω $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι θετική, μονότονη και φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 25. Έστω $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (α) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$0 < a_{n+1} < a_n < 3 \quad (1)$$

(β) Εξηγήστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 26. Έστω $a > 0$. Επιλέγουμε $a_1 > \sqrt{a}$ και έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \quad (2)$$

Δείξτε τα εξής: (α) $a_n \geq \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (β) $\frac{a}{a_n} \leq a_{n+1} \leq a_n$ (γ) $a_n \rightarrow \sqrt{a}$.

Άσκηση 27. Έστω $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ για κάθε $n \geq 1$.

(α) Δείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.

(β) Υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 28. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών.

(α) Αν $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

(β) Αν $\lim_n \sqrt[n]{a_n} < 1$ δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$.

Άσκηση 29. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \quad (3)$$

(β) Αποδείξτε ότι $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$.

Άσκηση 30. (α) Αν $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ δείξτε ότι $b_{n-1}^{-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο $\frac{1}{e}$.

(γ) Βρείτε το $\lim_n \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}{n^n}$.