

ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
(3ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. Να δείξετε ότι ο χώρος

$$X = \{f \in C([a, b]) : f(a) = 0\}$$

με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι χώρος Banach.

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 3 του φυλ. 2)

Ασκηση 2. Με l^∞ συμβολίζουμε τον χώρο των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι ο l^∞ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|, \text{ για } x = (x_n) \in l^\infty$$

είναι χώρος Banach.

Ασκηση 3. Με c_0 συμβολίζουμε τον χώρο των μηδενικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι ο c_0 εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι χώρος Banach.

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 3 του φυλ. 2)

Ασκηση 4. Έστω συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Αν $f \in C([0, 1])$ θέτουμε

$$\|f\|_g = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|g(x).$$

(i) Να δείξετε ότι η $\|\cdot\|_g$ είναι μία νόρμα στον $C([0, 1])$.

(ii) Αν $\inf_{x \in [0, 1]} g(x) = m > 0$ και $\sup_{x \in [0, 1]} g(x) = M < +\infty$, να δείξετε ότι η $\|\cdot\|_g$ είναι ισοδύναμη νόρμα με την $\|\cdot\|_\infty$.

Ασκηση 5. (i) Να δείξετε ότι η μοναδιαία σφαίρα

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

ενός χώρου με νόρμα, είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Να δείξετε ότι η μοναδιαία σφαίρα του l^2 δεν είναι συμπαγής.