

ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση
Λύσεις του 2ου φυλλαδίου ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω X χώρος με νόρμα και U υποσύνολο του X . Να δείξετε ότι το U είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) του U με $\lim x_n = x$ έχουμε ότι $x \in U$.

Λύση. Έστω ότι το U είναι κλειστό και ακολουθία (x_n) στοιχείων του U με $\lim x_n = x$. Αν υποθέσουμε ότι $x \notin U$, τότε $x \in U^c$ το οποίο είναι ανοιχτό και άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq U^c$. Τότε όμως από τον ορισμό του ορίου υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq U^c$ το οποίο προφανώς είναι άτοπο. Επομένως $x \in U$.

Για το αντίστροφο θα δείξουμε ότι το U^c είναι ανοιχτό. Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε θα υπάρχει $x \in U^c$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε

$$B(x, \frac{1}{n}) \cap U \neq \emptyset.$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε $x_n \in U$ με $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\lim x_n = x$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα το U^c είναι ανοιχτό οπότε το U είναι κλειστό. $\square$

Άσκηση 2. Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X . Να δείξετε ότι η κλειστότητα $\bar{Y}$ του Y είναι επίσης υπόχωρος του X .

Λύση. Το ζητούμενο προκύπτει από τις ιδιότητες ορίων για ακολουθίες. $\square$

Άσκηση 3. Έστω Y υπόχωρος του χώρου Banach $(X, \|\cdot\|)$. Να δείξετε ότι ο $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο Y είναι κλειστός.

Λύση. Αν ο $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach και (x_n) μία ακολουθία του με $\lim x_n = x$, τότε προφανώς $x \in Y$.

Αντίστροφα έστω ότι ο Y είναι κλειστός και (x_n) είναι μία Cauchy ακολουθία του. Τότε η (x_n) θα είναι μία Cauchy ακολουθία του X και ο X είναι χώρος Banach. Οπότε θα έχουμε ότι η (x_n) θα συγκλίνει σε κάποιο x , το οποίο όμως αφού ο Y είναι κλειστός θα ανήκει στον Y . Άρα ο Y είναι χώρος Banach. $\square$

Άσκηση 4. Έστω X χώρος με νόρμα.

(i) Ένα υποσύνολο C του X καλείται κυρτό αν για κάθε $x, y \in C$ και $t \in [0, 1]$

$$tx + (1 - t)y \in C.$$

Να δείξετε ότι η $B(0, 1)$ είναι κυρτό σύνολο.

(ii) Ένα κυρτό υποσύνολο C του X καλείται γνήσια κυρτό αν για κάθε $x, y \in C$ με $t \in (0, 1)$

$$tx + (1 - t)y \in C^\circ.$$

Είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ γνήσια κυρτή;

Λύση.

(ι) Αν $x, y \in B(0, 1)$ και $t \in [0, 1]$, τότε

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + 1 - t = 1$$

και άρα η $B(0, 1)$ είναι κυρτή.

(ιι) Η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι γνήσια κυρτή. Πράγματι αν $x = (1, 0)$ $y = (1, 1)$, τότε $\|x\| = \|y\| = 1$ αλλά

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_\infty = \left\| \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\|_\infty = 1$$

και συνεπώς το $\frac{x+y}{2}$ δεν ανήκει στο εσωτερικό της.

□

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι αν η ακολουθία (f_n) του $C([a, b])$ συγκλίνει στην $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα, τότε $f \in C([a, b])$.

Λύση. Έστω $x_0 \in [a, b]$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ για κάθε } n \geq n_0 \text{ και } x \in [a, b].$$

Επίσης αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0 , θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι αν $|x - x_0| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

και άρα η f είναι συνεχής στο x_0 .

□