

Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2025–26)

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 2 Νοεμβρίου 2025)

1. Έστω X μη κενό σύνολο, $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του X και $B \subset X$ τέτοιο ώστε $B \notin \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι η σ -άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια συνόλων $\mathcal{A} \cup \{B\}$ είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B)$ όπου $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

2. Έστω $n \geq 2$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{A}_n$ όλων των υποσυνόλων E του $\mathbb{Z}$ που έχουν την εξής ιδιότητα:

«Αν για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ τέτοιος ώστε $(kn + s) \in E$, τότε για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι $(kn + m) \in E$.»

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}_n$ είναι σ -άλγεβρα.

3. (α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία αλγεβρών στο X . Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι άλγεβρα στο X .

(β) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία σ -αλγεβρών στο X . Είναι σωστό ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι σ -άλγεβρα στο X ;

4. (α) Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ η ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $A_n = (-\frac{1}{n}, 1)$ αν ο n είναι περιττός και $A_n = (-1, \frac{1}{n})$ αν ο n είναι άρτιος. Να βρείτε τα σύνολα $\liminf_n A_n$ και $\limsup_n A_n$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$. Αν f και g είναι οι δείκτριες συναρτήσεις των συνόλων $\liminf_n A_n$ και $\limsup_n A_n$ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) \quad \text{και} \quad g(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x).$$

5. (α) Δώστε παράδειγμα απεικόνισης $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ που είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο αλλά δεν είναι (αριθμήσιμα προσθετικό) μέτρο.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ πεπερασμένα προσθετικό μέτρο. Αν το ν είναι επίσης αριθμήσιμα υποπροσθετικό, αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο.

6. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A, B, C \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε:

$$A \subseteq C, \quad B \subseteq C, \quad \mu(A) = \mu(C) < \infty.$$

Αποδείξτε ότι $\mu(A \cap B) = \mu(B)$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου και έστω $A, B \subseteq X$. Αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, αποδείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A)$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{D}$ οικογένεια μέτρων στην $\mathcal{A}$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}$ τότε υπάρχει $\mu_3 \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\mu_3 \geq \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Ορίζουμε

$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{D}\}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$.

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mu(A_n) \rightarrow 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) < +\infty$. Αποδείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$.

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{1 \leq k < m \leq n} \mu(A_k \cap A_m).$$

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$, τέτοια ώστε $\mu(\liminf_n A_n) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ της $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_{k_n}\right) > 0 \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$