

Εισαγωγή στα ΣΗΕ

Δημέας Άρης Διάλεξη #2

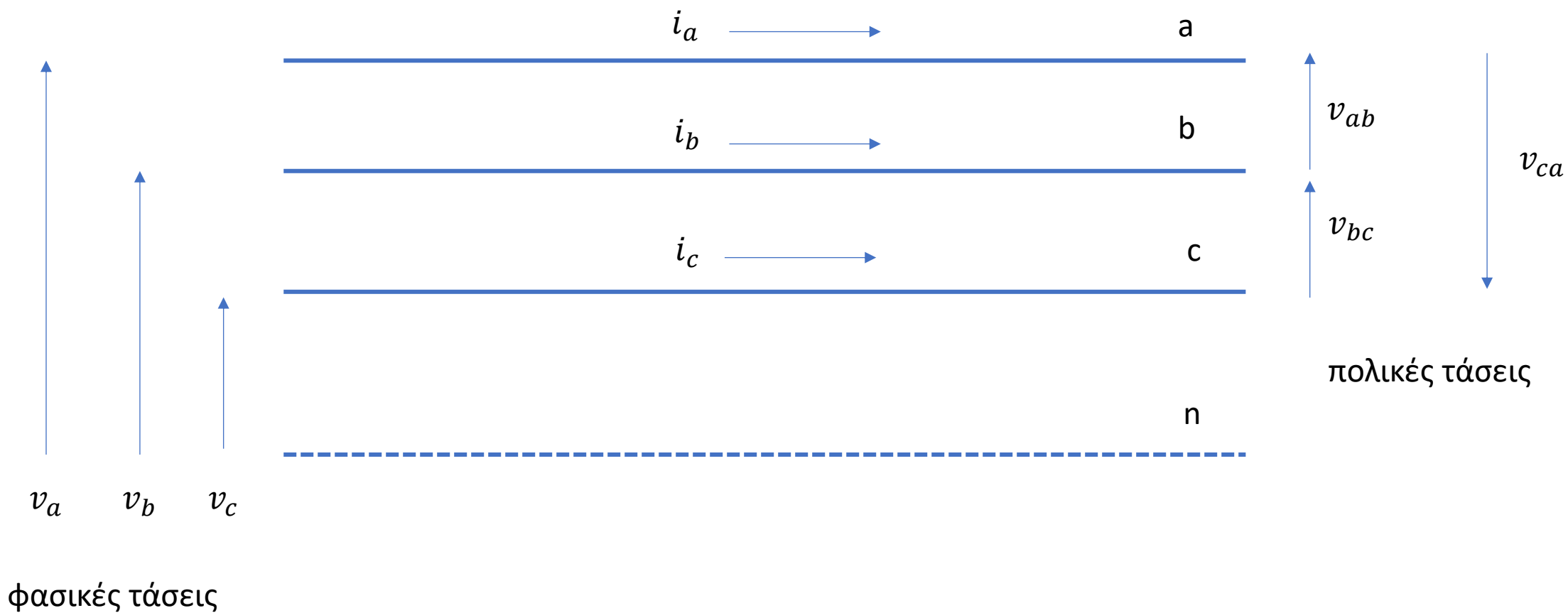
10/10/2025



Τριφασικά συστήματα: φασική και πολική τάση

- Θα εξετάσουμε συμμετρικά τριφασικά συστήματα
- Τα ρεύματα και οι τάσεις έχουν ίσα μέτρα και οι γωνίες τους διαφέρουν κατά 120°
- $v_a = \sqrt{2}V\cos\omega t, i_a = \sqrt{2}I\cos(\omega t - \theta)$
- $v_b = \sqrt{2}V\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}), i_b = \sqrt{2}I\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \theta) \quad (2.34)$
- $v_c = \sqrt{2}V\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}), i_c = \sqrt{2}I\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \theta)$

Τριφασικά συστήματα



Μιγαδική Μορφή των τάσεων (φασιθέτες)

- οι φασικές τάσεις γράφονται σε μιγαδική μορφή ως:

$$\begin{aligned}\hat{V}_a &= V \angle 0^\circ \\ \hat{V}_b &= V \angle -120^\circ \\ \hat{V}_c &= V \angle 120^\circ\end{aligned}\quad (2.35)$$

- Οι πολικές τάσεις μπορούν να εκφραστούν ως:

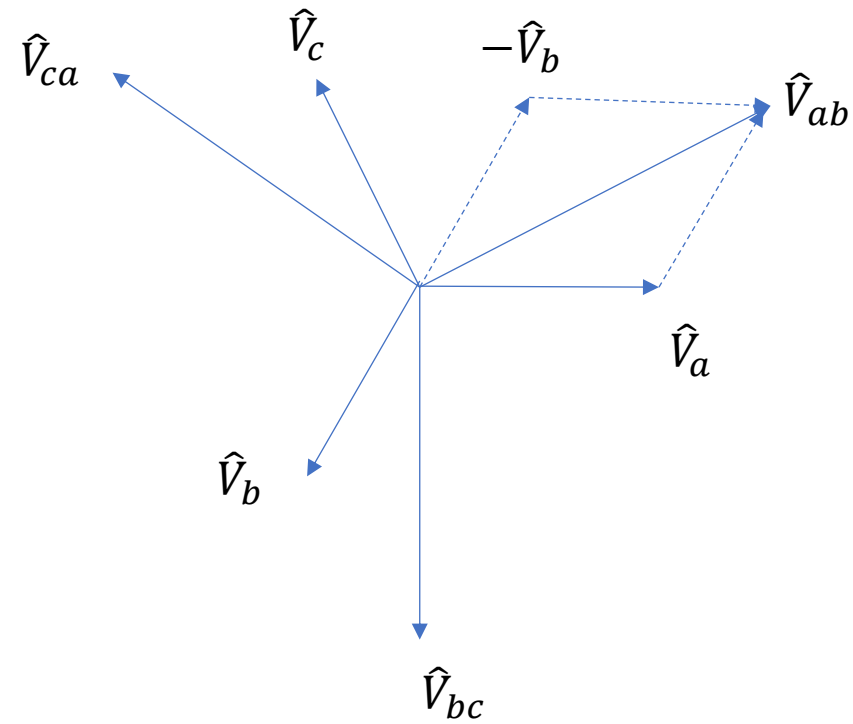
$$\begin{aligned}\hat{V}_{ab} &= \hat{V}_a - \hat{V}_b = V - \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V = \sqrt{3}V \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}V \angle 30^\circ \\ \hat{V}_{bc} &= \hat{V}_b - \hat{V}_c = \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V - \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V = \sqrt{3}V \angle -90^\circ \\ \hat{V}_{ca} &= \hat{V}_c - \hat{V}_a = \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)V - V = \sqrt{3}V \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}V \angle 150^\circ\end{aligned}$$

Στιγμιαίες τιμές των πολικών τάσεων

- Για τον υπολογισμό των στιγμιαίων τιμών θα χρησιμοποιήσουμε την εξής τριγωνομετρική ταυτότητα
- $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
- Οπότε τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned}v_{ab} &= \sqrt{6}V \cos(\omega t + \pi/6) \\v_{bc} &= \sqrt{6}V \cos(\omega t - \pi/2) \\v_{ca} &= \sqrt{6}V \cos(\omega t + 5\pi/6)\end{aligned}\tag{2.37}$$

Διανυσματικό διάγραμμα



Φασικές τάσεις από τις πολικές

- Αν γνωρίζουμε τις πολικές τάσεις, μπορούν να προκύψουν οι φασικές τάσεις.
- Θεωρώντας

$$\hat{V}_a + \hat{V}_b + \hat{V}_c = 0 \quad (2.39)$$

- Τότε

$$\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca} = \hat{V}_a - \hat{V}_b - (\hat{V}_c - \hat{V}_a) = 3\hat{V}_a \quad (2.38)$$

- Οπότε

$$\begin{aligned}\hat{V}_a &= (\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca})/3 \\ \hat{V}_b &= (\hat{V}_{bc} - \hat{V}_{ab})/3 \\ \hat{V}_c &= (\hat{V}_{ca} - \hat{V}_{bc})/3\end{aligned} \quad (2.40)$$

Συμμετρικό τριφασικό σύστημα,

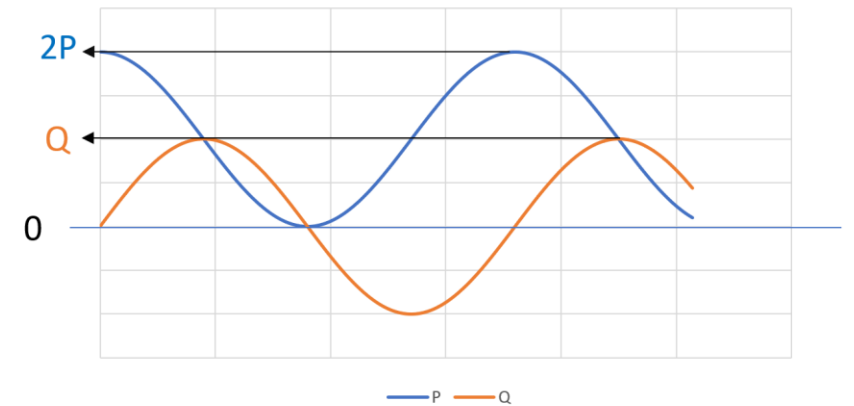
- Εφόσον δουλεύουμε με συμμετρικό τριφασικό σύστημα, όλες οι τάσεις είναι γνωστές αν ξέρουμε τη μία
- Οπότε δε χρειάζεται να υπολογίζουμε και τις τρεις φάσεις ξεχωριστά
- Χρειάζεται να συγκρατήσουμε είναι ότι η φασική τάση συνδέεται με την πολική τάση με την ακόλουθη σχέση:

$$\hat{V}_{\pi} = \sqrt{3}\hat{V}_{\varphi} \angle +30^{\circ}$$

Στις εφαρμογές μας θα θεωρούμε πάντα ότι η τάση είναι πολική, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.

Τριφασική ισχύς

- Έχουμε δείξει ότι η ισχύς που ρέει σε μια μονοφασική γραμμή εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από δύο παλλόμενες συνιστώσες:
- Η συνιστώσα $p(t)-q(t)$ έχει μέση τιμή ίση με την πραγματική (ενεργό) ισχύ P και ίσο πλάτος ταλάντωσης
- Η συνιστώσα $q(t)$ έχει μέση τιμή μηδέν και πλάτος ταλάντωσης ίσο με την άεργο ισχύ Q



$$P (1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t$$

Συνολική ισχύς στις τρεις φάσεις

- Για την μονοφασική ισχύ είχαμε δείξει (έστω στη φάση α)
- $p_a(t) = vi = 2VI\cos(\omega t)\cos(\omega t + \theta) = VI\cos\theta + VI\cos(2\omega t + \theta)$
- Οπότε

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = VI\cos\theta + VI\cos(2\omega t + \theta) + VI\cos\theta + \\ &VI\cos(2\omega t - 4\pi/3 + \theta) + VI\cos\theta + VI\cos(2\omega t + 4\pi/3 + \theta) \\ &= 3VI\cos\theta \end{aligned}$$

Συνολική τριφασική Ισχύς

- Η συνολικά μεταφερόμενη στιγμιαία ισχύς σε ένα τριφασικό σύστημα είναι:

$$P=3 V_{\varphi} I_L \cos\theta = \sqrt{3} V_{\pi} I_L \cos\theta \quad (2.42)$$

- Όπου
- $V_{\varphi}=V$: ενεργός τιμή των φασικών τάσεων
- $V_{\pi}= \sqrt{3}V$: ενεργός τιμή των πολικών τάσεων
- I_L : ενεργός τιμή ρεύματος σε κάθε φάση της γραμμής

Τριφασική άεργος και τριφασική μιγαδική ισχύς

- Αντίστοιχα η τριφασική άεργος ισχύς Q ορίζεται σαν το άθροισμα του εύρους ταλάντωσης της στιγμιαίας άεργου ισχύος των τριών φάσεων (κατ'αναλογία προς τη μία φάση):

$$Q=3 V_{\varphi} I_L \sin\theta = \sqrt{3} V_{\pi} I_L \sin\theta \quad (2.43)$$

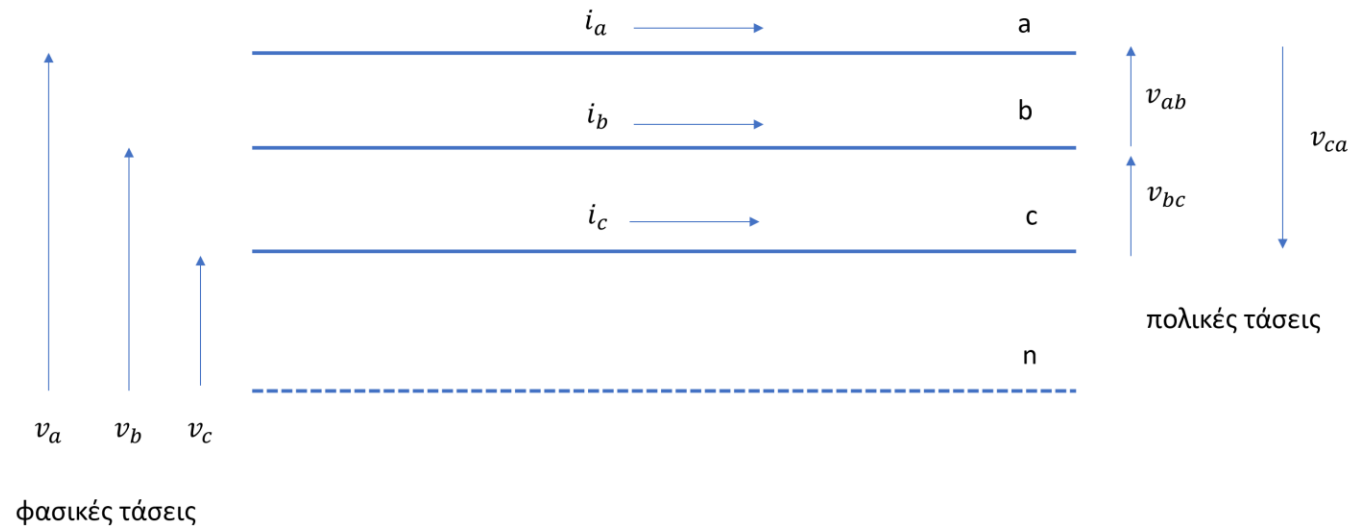
- Και η τριφασική μιγαδική ισχύς ορίζεται

$$S=P+jQ= 3\hat{V}_{\varphi} \hat{I}_L^* \quad (2.44)$$

Το θ είναι η διαφορά μεταξύ φασικής(όχι πολικής) τάσης και ρεύματος

Συνδεσμολογίες Αστέρα και Τρίγωνο

- Υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί να συνδεθεί μία πηγή και ένα φορτίο:
 - Αστέρα
 - Τρίγωνο



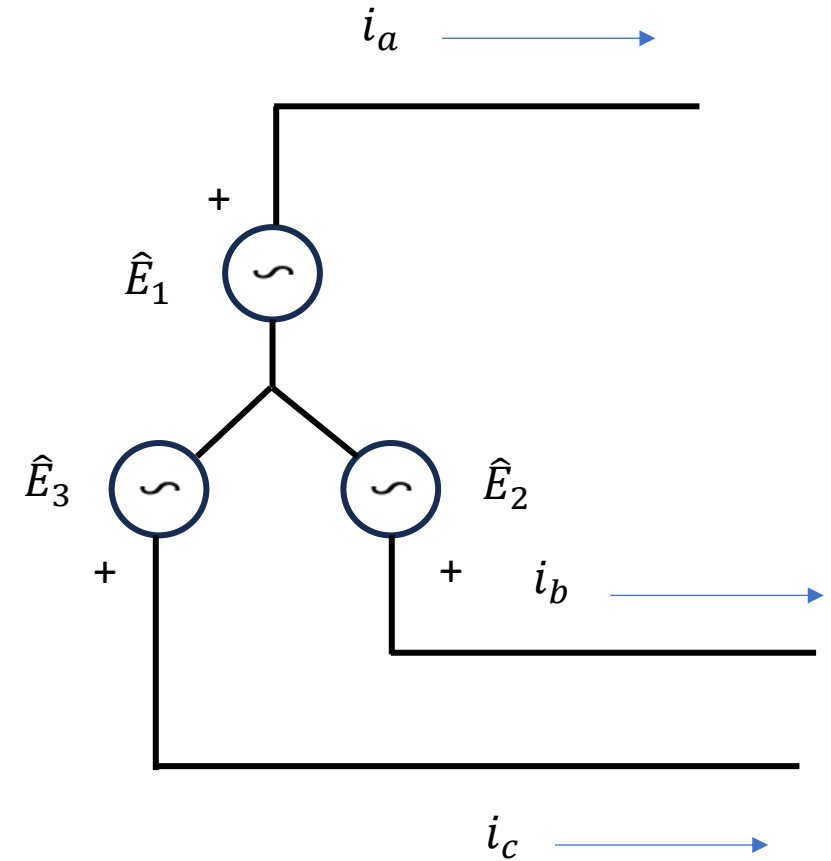
Σύνδεση Αστέρα

- Οι τάσεις $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$ και $\hat{E}_3$ (ηλεκτρεγερτική δύναμη, ΗΕΔ) ονομάζονται φάσεις της πηγής και συμβολίζονται με τους παραστατικούς μιγαδικούς αριθμούς:

$$\begin{aligned}\hat{E}_1 &= E \angle 0^\circ \\ \hat{E}_2 &= E \angle -120^\circ \\ \hat{E}_3 &= E \angle 120^\circ\end{aligned}\quad (2.46)$$

- Τα ρεύματα που διαρρέουν τις φάσεις της πηγής είναι ίσα με τα ρεύματα που ρέουν στη γραμμή:

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \hat{I}_a \\ \hat{I}_2 &= \hat{I}_b \\ \hat{I}_3 &= \hat{I}_c\end{aligned}\quad (2.47)$$



Ρεύματα στη συνδεσμολογία αστέρα

- Οι εξισώσεις (2.47) μπορούν να συμβολιστούν ως:

$$\hat{I}_Y = \hat{I}_L \quad (2.48)$$

- Όπου
- $\hat{I}_Y$: ρεύμα μιας φάσης της πηγής συνδεδεμένης κατ'αστέρα
- $\hat{I}_L$: ρεύμα της φάσης της γραμμής
- Μπορεί (αλλά όχι υποχρεωτικά) να γειώνεται ο ουδέτερος κόμβος. Η συνδεσμολογία αυτή (γειωμένος αστέρας) είναι διαδεδομένη σε σύγχρονες γεννήτριες

Τάσεις στη συνδεσμολογία αστέρα

- Πολικές τάσεις της γραμμής:

$$\begin{aligned}\hat{V}_{ab} &= \sqrt{3}E\angle 30^\circ \\ \hat{V}_{bc} &= \sqrt{3}E\angle -90^\circ \\ \hat{V}_{ca} &= \sqrt{3}E\angle 150^\circ\end{aligned}\tag{2.49}$$

- Αν συμβολίσουμε V_π με την ενεργό τιμή της πολικής τάσης και E_Y την ενεργό τιμή την ΗΕΔ μιας φάσης, τότε

$$V_\pi = \sqrt{3}E_Y \tag{2.50}$$

Ισχύς στην συνδεσμολογία αστέρα

- Σύμφωνα με την 2.44

$$S = 3\hat{V}_\varphi \hat{I}_L^* = 3\hat{V}_Y \hat{I}_Y^* \quad (2.52)$$

- Θεωρώντας και την $\hat{I}_Y = \hat{I}_L$ (2.48) και ότι $\hat{V}_\varphi = \hat{E}_Y$, η φαινόμενη ισχύς είναι

$$S = 3V_\varphi I_L = \sqrt{3}V_\pi I_L$$

Συνδεσμολογία τριγώνου

- Στη συνδεσμολογία τριγώνου, η πολική τάση της γραμμής είναι ίση με την ΗΕΔ κάθε φάσης της πηγής. Άρα για τις ενεργές τιμές ισχύει πως:

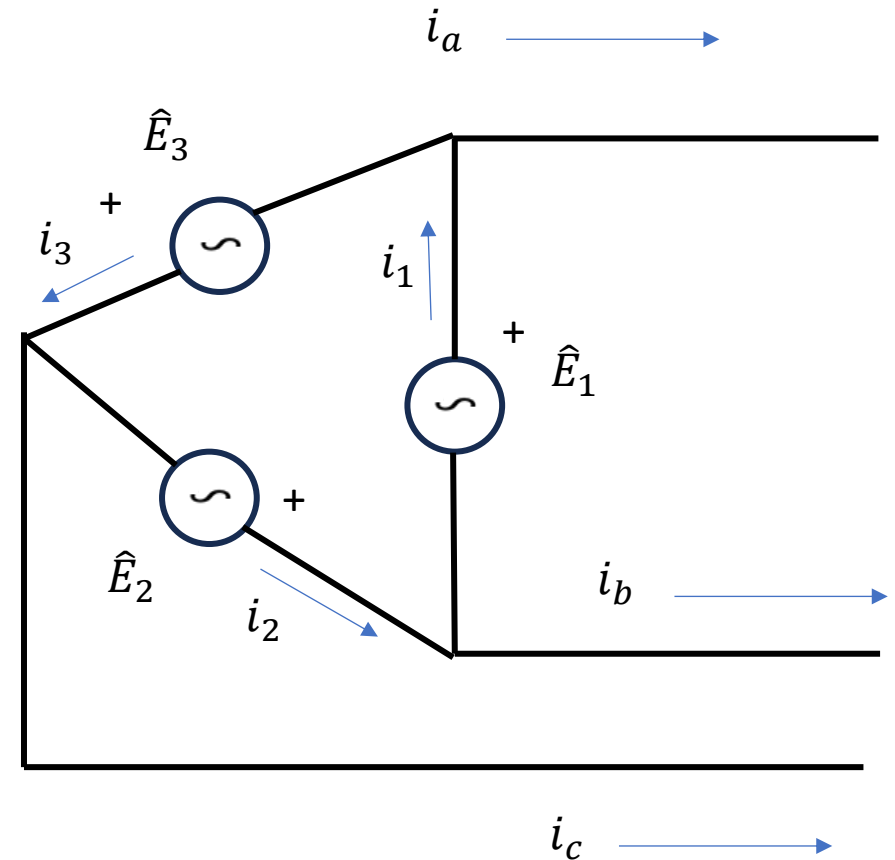
$$V_{\pi} = E_{\Delta} \quad (2.53)$$

- Η φασική τάση στη γραμμή είναι:

$$\hat{V}_a = \frac{1}{3}(\hat{E}_1 - \hat{E}_3) = \frac{E_{\Delta}}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \angle -30^{\circ}$$

- Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω της (2.40), η οποία λέει ότι $\hat{V}_a = (\hat{V}_{ab} - \hat{V}_{ca})/3$
- Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της (2.35), η οποία λέει ότι $\hat{V}_a = V \angle 0^{\circ}$ και $\hat{V}_c = V \angle +120^{\circ}$
- Συμπέρασμα: αν μια τριφασική πηγή με ΗΕΔ E_{Δ} ανά φάση συνδεθεί κατά τρίγωνο, η rms της φασικής τάσης της γραμμής είναι $E_{\Delta}/\sqrt{3}$:

$$V_{\phi} = \frac{E_{\Delta}}{\sqrt{3}} \quad (2.54)$$



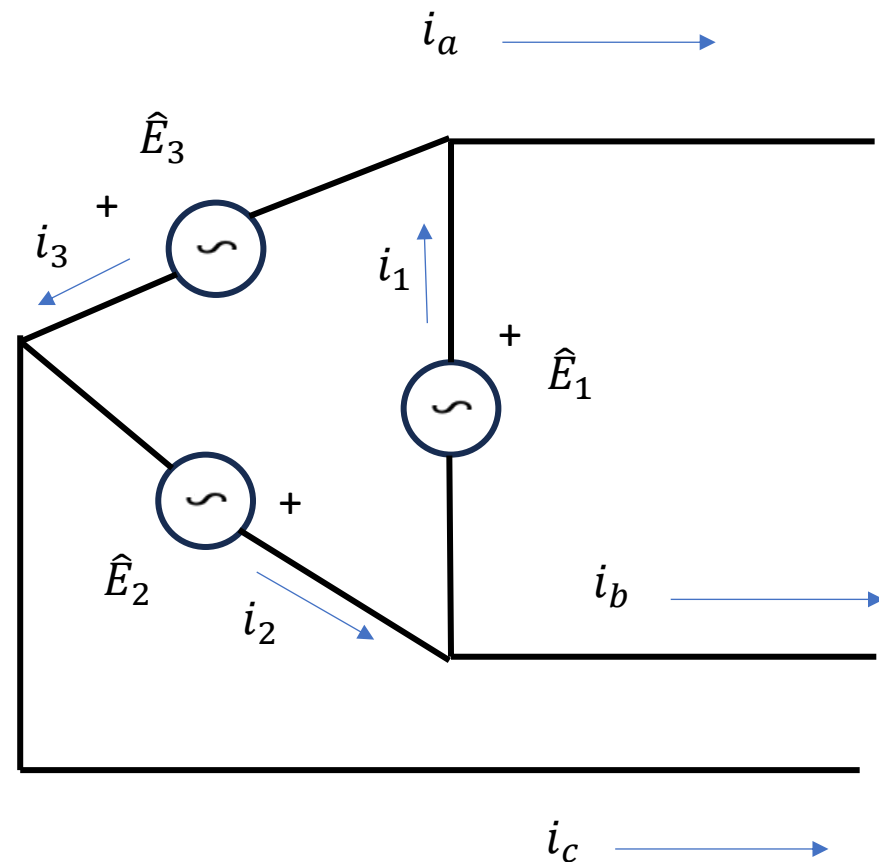
Ρεύματα συνδεσμολογίας τριγώνου

- Όταν μια πηγή συνδέεται κατά τρίγωνο, το ρεύμα κάθε φάσης της πηγής δεν είναι πλέον ίσο με το ρεύμα της γραμμής.

$$\begin{aligned}\hat{I}_a &= \hat{I}_1 - \hat{I}_3 \\ \hat{I}_b &= \hat{I}_2 - \hat{I}_1 \\ \hat{I}_c &= \hat{I}_3 - \hat{I}_2\end{aligned}\quad (2.55)$$

- Συμβολίζοντας με φ τη διαφορά φάσης του φασικού ρεύματος της πηγής ως προς την τάση της πηγής,

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= I \angle \varphi \\ \hat{I}_2 &= I \angle \varphi - 120^\circ \\ \hat{I}_3 &= I \angle \varphi + 120^\circ\end{aligned}\quad (2.56)$$



Ρεύματα στη συνδεσμολογία τριγώνου

- Από την (2.56) και την (2.55), έχουμε:

$$\hat{I}_a = \hat{I}_1 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \sqrt{3}\hat{I}_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}\hat{I}_1 \angle -30^\circ$$

- Όταν η πηγή συνδέεται κατά τρίγωνο, το ρεύμα σε κάθε φάση της γραμμής είναι 3 φορές μεγαλύτερο από το ρεύμα που διαρρέει τις φάσεις της πηγής. Συγκεκριμένα, για το ρεύμα γραμμής $\hat{I}_L$ ισχύει:

$$\hat{I}_L = \sqrt{3} \hat{I}_\Delta \quad (2.57)$$

Ισχύς συνδεσμολογίας τριγώνου

- Η μιγαδική ισχύς που παράγει η πηγή είναι $\mathbf{S} = 3\hat{E}_1\hat{I}_1^*$
- Από την προηγούμενη ανάλυσή μας γνωρίζουμε ότι

- $\hat{V}_a = \frac{\hat{E}_1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ$ και

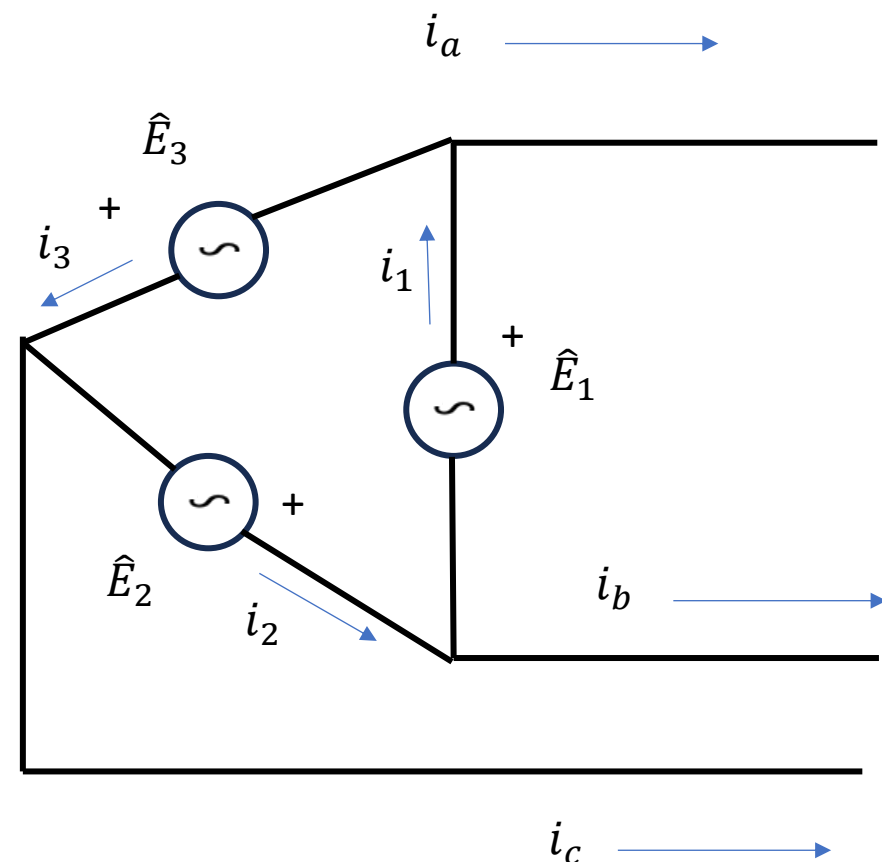
- $\hat{I}_a = \sqrt{3}\hat{I}_1 \angle 30^\circ$

- Άρα έχουμε:

$$\mathbf{S} = 3\hat{E}_1\hat{I}_1^* = 3\hat{V}_a\hat{I}_a^* \quad (2.58)$$

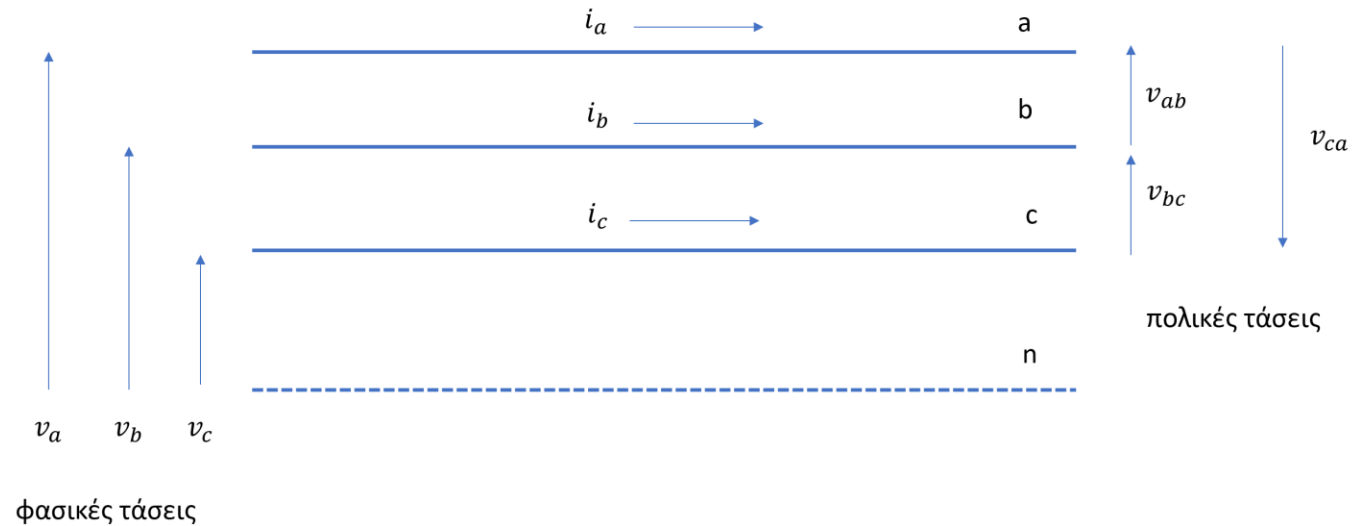
- Άρα η φαινόμενη ισχύς μπορεί να εκφραστεί ως

$$S = 3E_\Delta I_\Delta = \sqrt{3}V_\pi I_L \quad (2.59)$$



Συνδεσμολογία φορτίου

- Έστω τώρα ότι στο δεξί μέρος του κυκλώματος έχουμε ένα ηλεκτρικό φορτίο που αποτελείται από τρεις σύνθετες αντιστάσεις $\mathbf{Z}$, ίσες μεταξύ τους
- Όπως και στην περίπτωση της πηγής, οι αντιστάσεις μπορούν να συνδεθούν σχηματίζοντας είτε αστέρα είτε τρίγωνο



Συνδεσμολογία φορτίου σε αστέρα: ρεύμα

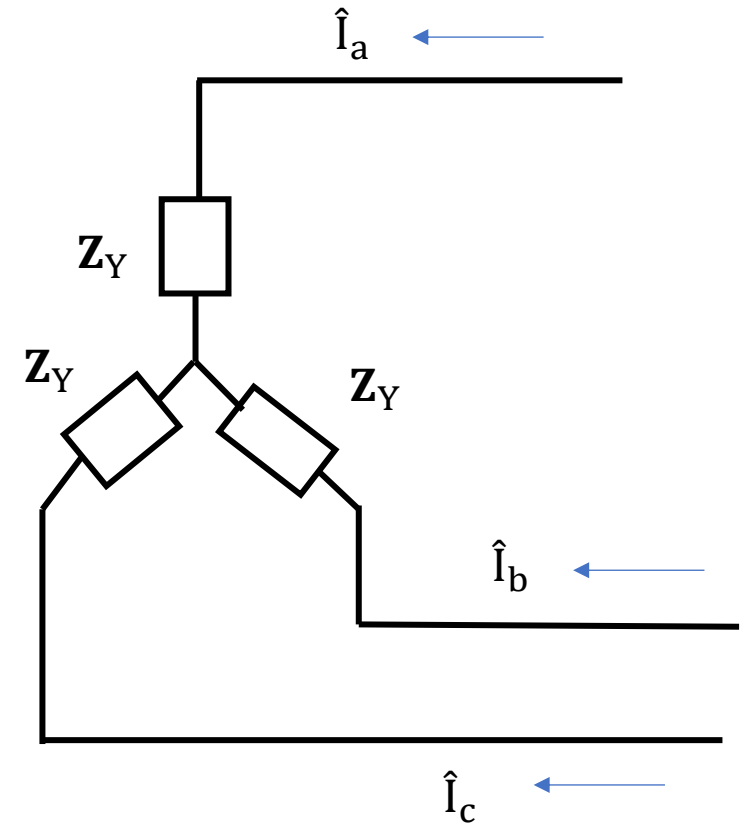
- Στη συνδεσμολογία αστέρα, το ρεύμα σε κάθε αντίσταση είναι ίσο με το ρεύμα της γραμμής
- Η τάση στα άκρα κάθε αντίστασης είναι ίση με τη φασική τάση

- Βάσει του ορισμού της σύνθετης αντίστασης:

$$\hat{I}_a = \frac{\hat{V}_a}{Z_Y} \quad (2.61)$$

- Το οποίο λόγω συμμετρίας είναι αρκετό για να περιγράψουμε πλήρως τις τρεις φάσεις. Συμβολίζοντας με I_L την ενεργό τιμή του ρεύματος γραμμής και με V_φ την ενεργό τιμή της φασικής τάσης, έχουμε:

$$I_L = \frac{V_\varphi}{Z_Y} \quad (2.60)$$



Συνδεσμολογία φορτίου σε αστέρα: ισχύς

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει ένα συμμετρικό τριφασικό φορτίο συνδεδεμένο κατ'αστέρα υπολογίζεται συναρτήσει της σύνθετης αντίστασης, όπως στην (2.31):

$$\mathbf{S} = 3\hat{V}_\varphi \hat{I}_L^* = \frac{3V_\varphi^2}{\mathbf{Z}_Y^*} = \frac{V_\pi^2}{\mathbf{Z}_Y^*} \quad (2.62)$$

όπου θυμόμαστε από τη (2.41) ότι η φασική και η πολική τάση έχουν την ακόλουθη σχέση: $\hat{V}_\pi = \sqrt{3}\hat{V}_\varphi \angle + 30^\circ$

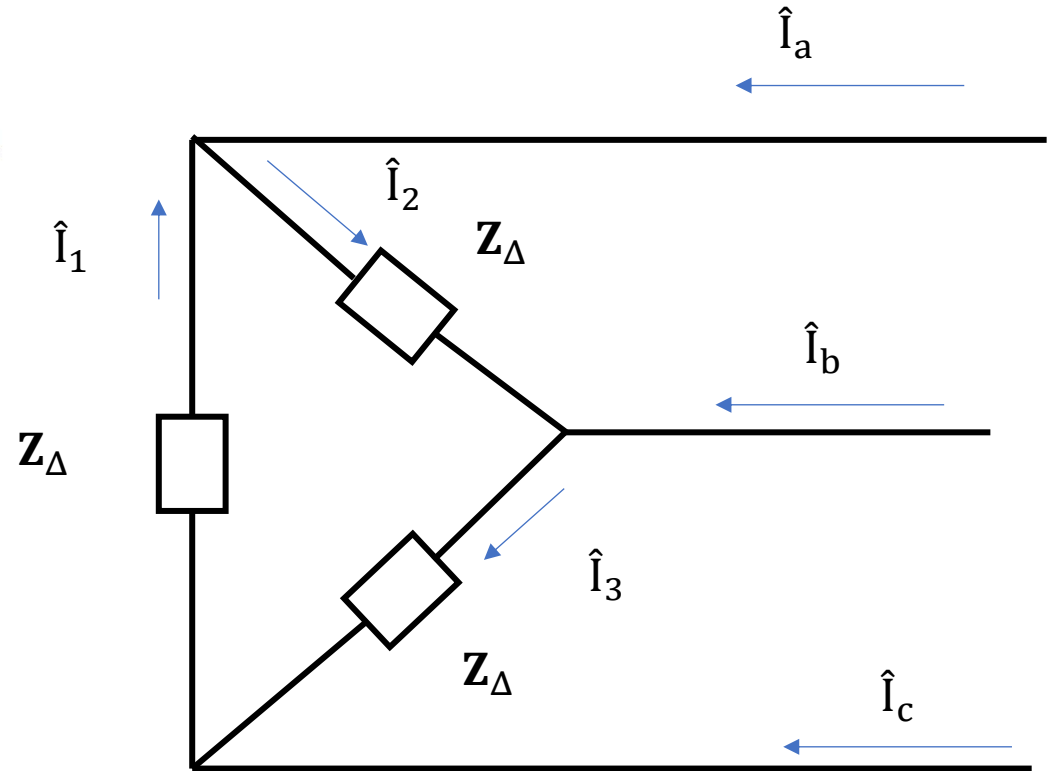
Συνδεσμολογία φορτίου κατά τρίγωνο: ρεύμα

- Στη συνδεσμολογία τριγώνου, η τάση που εφαρμόζεται σε κάθε αντίσταση είναι η πολική τάση
- Άρα, από άποψης ενεργών τιμών, το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντίσταση είναι:

$$I_{\Delta} = \frac{V_{\pi}}{Z_{\Delta}} \quad (2.63)$$

- Θυμόμαστε από τον τύπο (2.57) ότι $I_L = \sqrt{3}I_{\Delta}$
- Αν και ο τύπος (2.57) είχε εξαχθεί για την περίπτωση πηγής σε συνδεσμολογία τριγώνου, συνεχίζει να ισχύει για την περίπτωση φορτίου σε συνδεσμολογία τριγώνου δεδομένης της συμμετρίας των ρευμάτων των φάσεων
- Άρα από την (2.63) και την (2.41) (πάλι, η (2.41) λέει ότι $\hat{V}_{\pi} = \sqrt{3}\hat{V}_{\phi} \angle + 30^\circ$):

$$I_L = \sqrt{3}I_{\Delta} = \frac{3V_{\phi}}{Z_{\Delta}} \quad (2.64)$$



Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για πηγές τάσης

- Μια πηγή σε συνδεσμολογία τριγώνου μπορεί να μετατραπεί σε μια ισοδύναμη πηγή συνδεσμολογίας αστέρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.54)
- Η (2.54) λέει ότι $V_\phi = \frac{E_\Delta}{\sqrt{3}}$
- Στην περίπτωση μας, έχουμε ότι η φασική τάση είναι η τάση της συνδεσμολογίας τριγώνου E_Y .

$$E_Y = \frac{E_\Delta}{\sqrt{3}} \quad (2.65)$$

- Η ισοδυναμία σημαίνει ότι παράγεται η ίδια ισχύς και από τις δύο συνδεσμολογίες αν το ρεύμα γραμμής είναι I_L , γιατί οι τάσεις μεταξύ των φάσεων της γραμμής είναι ίσες

Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για αντιστάσεις

- Έστω $\mathbf{Z}_{12}, \mathbf{Z}_{23}, \mathbf{Z}_{31}$ οι σύνθετες αντιστάσεις συνδεσμολογίας κατά τρίγωνο
- Και ας συμβολίσουμε με $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$ τις ισοδύναμες σύνθετες αντιστάσεις συνδεσμολογίας κατ'αστέρα
- Γνωρίζουμε από τη θεωρία κυκλωμάτων πως:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 &= \frac{\mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{31}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}} \\ \mathbf{Z}_2 &= \frac{\mathbf{Z}_{23}\mathbf{Z}_{12}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}} \\ \mathbf{Z}_3 &= \frac{\mathbf{Z}_{31}\mathbf{Z}_{23}}{\mathbf{Z}_{12} + \mathbf{Z}_{23} + \mathbf{Z}_{31}}\end{aligned}\tag{2.66}$$

Μετατροπή τριγώνου σε αστέρα για αντιστάσεις

- Στην περίπτωση συμμετρικού συστήματος, έχουμε τρεις ίσες αντιστάσεις στη συνδεσμολογία τριγώνου:

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{23} = \mathbf{Z}_{31} = \mathbf{Z}_{\Delta}$$

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.66), έχουμε ότι είναι ισοδύναμες με τρεις ίσες αντιστάσεις συνδεδεμένες κατ'αστέρα, όπου:

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_{\Delta}}{3} \quad (2.67)$$

- Η ισοδυναμία σημαίνει πως, αν εφαρμοστεί η ίδια τάση σε κάθε φάση της γραμμής, το ρεύμα γραμμής θα είναι το ίδιο και στις δύο συνδεσμολογίες
- Η ισχύς που καταναλώνεται και στις δύο συνδεσμολογίες είναι:

$$\mathbf{S} = \frac{V_{\pi}^2}{\mathbf{Z}_Y^*} = 3 \frac{V_{\pi}^2}{\mathbf{Z}_{\Delta}^*} \quad (2.68)$$

- Η πρώτη ισότητα είναι η (2.62)
- Και η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την (2.67)

Χρήσιμες Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
- $\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$
- $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

Μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές τιμές

Μοίρες	Rad	cos	sin
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	1
120	$\frac{2\pi}{3}$	-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5
180	π	-1	0