

Εισαγωγή στα ΣΗΕ

Δημέας Άρης Διάλεξη #1

08/10/2025

Βασισμένο στο βιβλίο

Εισαγωγή στα ΣΗΕ



Περιεχόμενα

- Παραστατικοί Μιγαδικοί Αριθμοί
- Σύνθετες Αντιστάσεις Παθητικών Στοιχείων
- Ενεργός και Άεργος Ισχύς

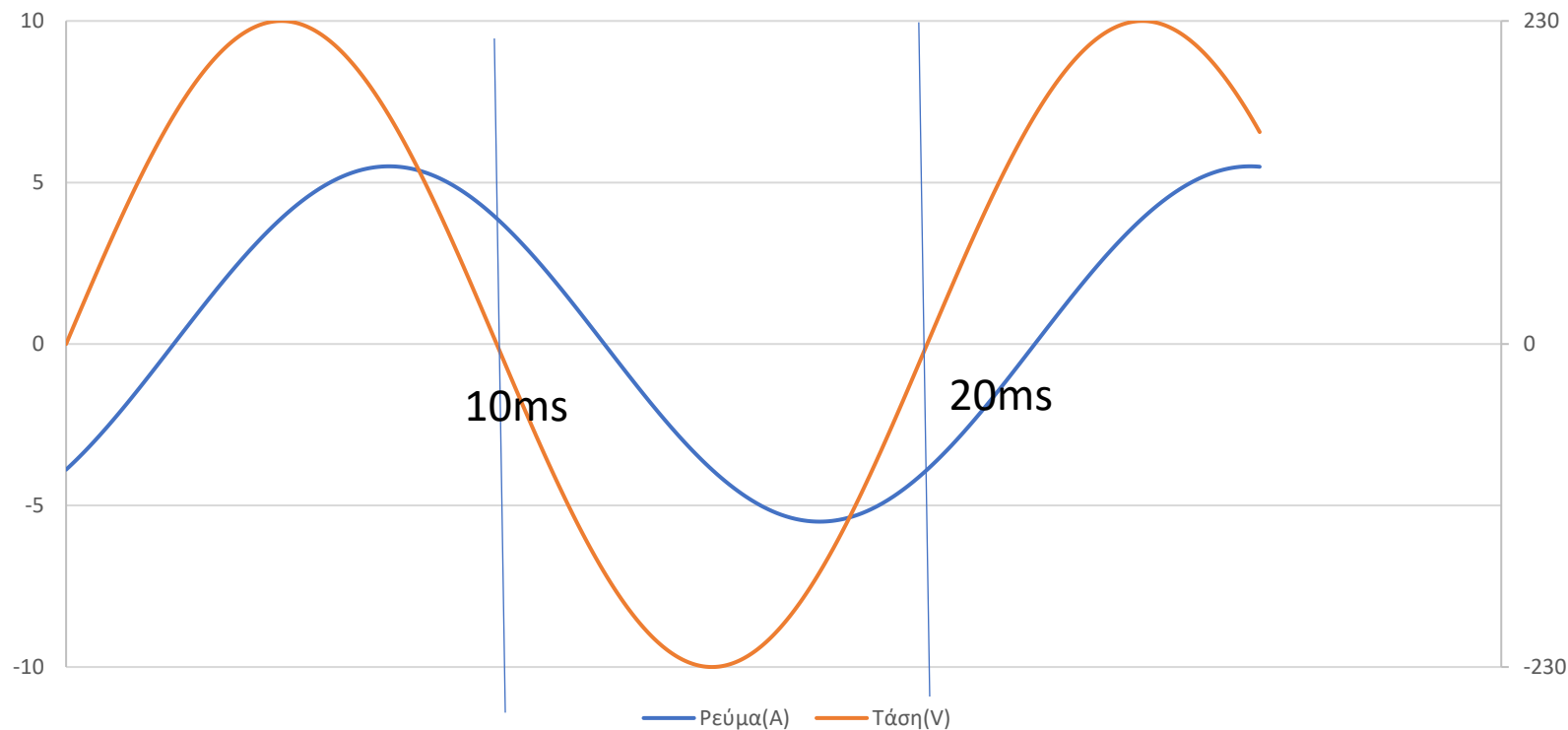
Παραστατικοί Μιγαδικοί Αριθμοί

- Έστω η γενική ημιτονοειδής συνάρτηση

$$f(t) = F_{max} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.1)$$

- Μπορεί να εκφράζει ρεύμα ή τάση
- F_{max} : η μέγιστη τιμή της συνάρτησης
- ω : η κυκλική συχνότητα
- ϕ : η γωνία φάσης

Παράδειγμα



- Συχνότητα 50Hz (περίοδος 20ms) $\Rightarrow \omega = 2\pi f = 100\pi$
- Τάση: $V(t) = 230V \sin(\omega t) = 230V \cos(\omega t + 90^\circ) \Rightarrow V_{max} = 230V, \varphi = 90^\circ$
- Ρεύμα: $I(t) = 5.5A \sin(\omega t - 45^\circ) = 5.5A \cos(\omega t + 45^\circ) \Rightarrow I_{max} = 5.5A, \varphi = 45^\circ$

Ταυτότητα Euler

- Θεωρούμε ότι στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας η κυκλική συχνότητα ω παραμένει σταθερή
- Η συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να οριστεί από την μέγιστη ισχύ και τη γωνία φάσης χρησιμοποιώντας την μιγαδική αναπαράσταση
- Ταυτότητα του Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ (2.2)
- Άρα η $f(t) = F_{max} \cos(\omega t + \varphi)$ (2.1) είναι το πραγματικό μέρος της (2.2) δηλαδή

$$f(t) = \text{Re}\langle F_{max} e^{i\varphi} e^{i\omega t} \rangle (2.3)$$

Ενεργός ή ενδεικνύμενη τιμή (RMS)

- Η ενεργός ή ενδεικνύμενη τιμή της f δίδεται από την σχέση

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{F_{max}}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

- Σημείωση: $\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$

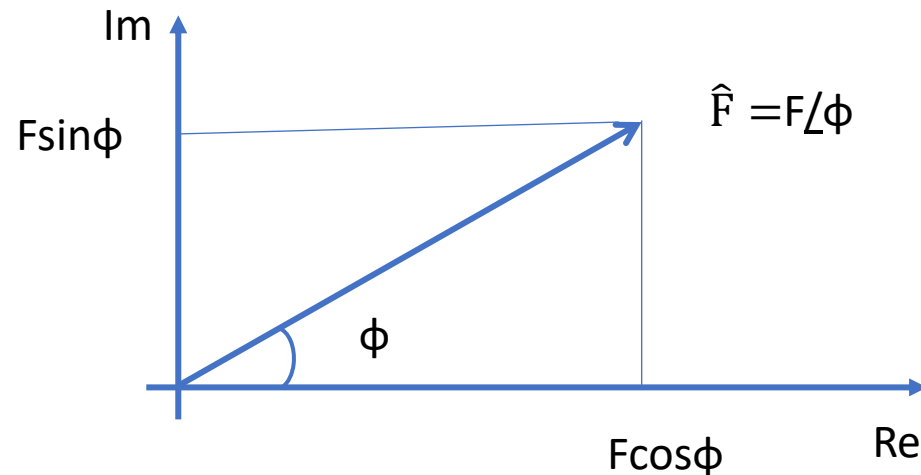
Παραστατικός μιγαδικός αριθμός και καρτεσιανή μορφή

- Ορίζεται ως παραστατικός μιγαδικός αριθμός (φασιθέτης, phasor) της $f(t)$ ο:

$$\hat{F} = F e^{j\varphi} = F \angle \varphi \quad (2.5)$$

- Η καρτεσιανή μορφή είναι $f(t)$ είναι

$$\hat{F} = F(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad (2.6)$$



Συμβολισμός Μεγεθών

Σύμβολο	Περιγραφή
v, i, e, p	Στιγμιαία τιμές τάσεων, ρεύματος, κλπ
V, I, E	Ενεργός (RMS)
$\hat{V}, \hat{I}, \hat{E}$	Παραστατικοί μιγαδικοί αριθμοί
$\mathbf{Z}, \mathbf{S}$	Σύνθετη αντίσταση, μιγαδική ισχύς
Z, S	Μέτρο σύνθετης αντίστασης, φαινόμενη ισχύς

Η σύνθετη αντίσταση και η μιγαδική ισχύς θα οριστούν στη συνέχεια

Παράδειγμα (2.1.2)(α)

- Να γραφεί σε μιγαδική (διανυσματική) μορφή η εναλλασσόμενη τάση $v(t)=100V\cos(100\pi t-\pi/6)$
- Βάσει της (2.4) $\left(F = \frac{F_{max}}{\sqrt{2}}\right)$ η rms τιμή είναι $V = \frac{100}{\sqrt{2}} V = 70.7V$
- Οπότε $\hat{V} = 70.7\angle -30^\circ$

Παράδειγμα (2.1.2)(β)

- Γράψτε σε ημιτονοειδή μορφή τη διανυσματική παράσταση
 $\hat{I} = 100A/20^\circ$

Βάσει της (2.3) $f(t) = \text{Re}\langle F_{max} e^{j\varphi} e^{j\omega t} \rangle$ έχουμε

$$i(t) = 100 \sqrt{2} A \cos(\omega t + 20^\circ)$$

Παράδειγμα (2.1.2)(γ)

- Προσθέστε δύο ημιτονοειδείς συναρτήσεις ίδιας συχνότητας χρησιμοποιώντας τις διανυσματικές παραστάσεις

- Έστω οι συναρτήσεις:

$$a(t) = \sqrt{2}A\cos(\omega t + a) \text{ και } b(t) = \sqrt{2}B\cos(\omega t + \beta)$$

- Το άθροισμα θα είναι $c(t)=a(t)+b(t)$

- Χρησιμοποιώντας την 2.3: $f(t) = \text{Re}\langle F_{max}e^{i\varphi}e^{j\omega t}\rangle$ έχουμε

$$\begin{aligned} c(t) &= \text{Re}\langle \sqrt{2}Ae^{ja}e^{j\omega t} + \sqrt{2}Be^{j\beta}e^{j\omega t}\rangle = \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t}(\hat{A} + \hat{B})\rangle \\ &= \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t}\hat{C}\rangle \end{aligned}$$

Όπου $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$

Πρακτικά λέμε ότι με την χρήση παραστατικών μιγαδικών αριθμών απλοποιούμε πάρα πολύ τις πράξεις

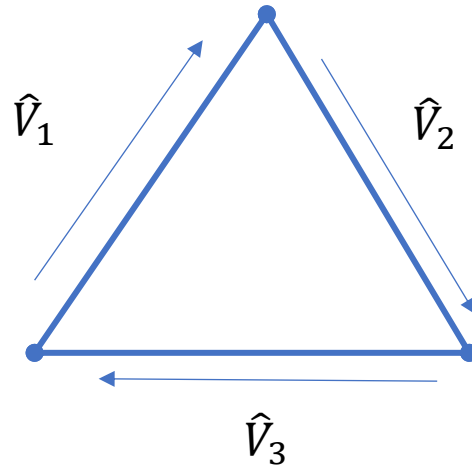
Νόμοι Kirchhoff

- Στο προηγούμενο παράδειγμα (2.1.2-γ) δείξαμε ότι τα αθροίσματα ημιτονοειδών συναρτήσεων είναι ισοδύναμα με τα αθροίσματα των φασιθετών τους
- Άρα, σε κυκλώματα με ημιτονοειδή σήματα ίσης συχνότητας, μπορούμε να εκφράσουμε διανυσματικά τους νόμους τάσης και ρεύματος του Kirchhoff

Νόμος Τάσεων του Kirchhoff

- Νόμος Τάσεων: το άθροισμα πτώσεων τάσεων κατά μήκος κάθε βρόχου ενός κυκλώματος είναι μηδέν:

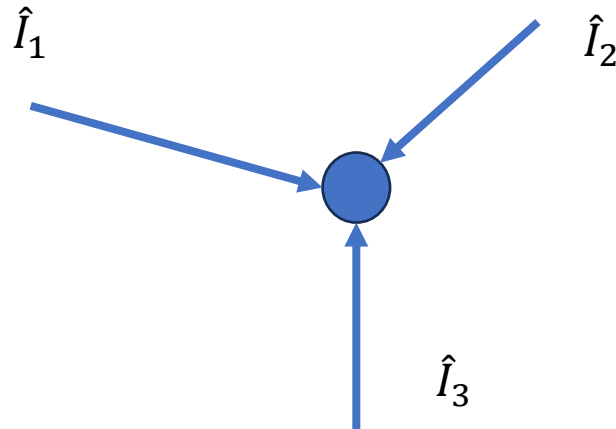
$$\sum_i \hat{V}_i = 0$$



Νόμος ρευμάτων

- Νόμος ρευμάτων: το άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε κόμβο ενός κυκλώματος είναι μηδέν:

$$\sum_i \hat{I}_i = 0$$

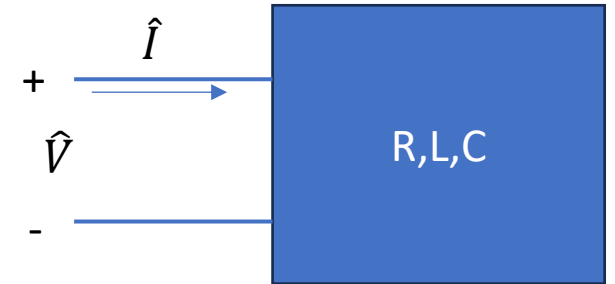


Σύνθετες αντιστάσεις παθητικών
στοιχείων

Σύνθετη αντίσταση

- Η σύνθετη αντίσταση ενός γραμμικού παθητικού δικτύου που αποτελείται από ωμικές αντιστάσεις, πηνία και πυκνωτές ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = R + jX \quad (2.9)$$



- $\hat{V}$: μιγαδική τάση στα άκρα του στοιχείου
- $\hat{I}$: ρεύμα που διαρρέει το στοιχείο
- R : πραγματικό μέρος σύνθετης αντίστασης, ισοδύναμη ωμική αντίσταση
- X : φανταστικό μέρος σύνθεσης αντίστασης, επαγωγική αντίδραση

Νόμος του Ohm για αυτεπαγωγές

- Νόμος του Ohm για πηνίο με αυτεπαγωγή L :

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (2.10)$$

- Αν το ρεύμα είναι ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$i(t) = \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t} \hat{I} \rangle \quad (2.11)$$

- Από τις 2.10 και 2.11 προκύπτει

- $v = L \frac{d}{dt} \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t} \hat{I} \rangle = \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t} j\omega L \hat{I} \rangle$

- Οπότε τελικά:

$$\hat{V} = j\omega L \hat{I} \quad (2.12)$$

Σύνθετη αντίσταση αυτεπαγωγής

- Από την (2.12) έχουμε ότι η σύνθετη αντίσταση ενός πηνίου είναι:

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L \quad (2.13)$$

- Άρα ένα ιδανικό πηνίο (αυτεπαγωγή) έχει
 - μηδενική ωμική αντίσταση
 - επαγωγική αντίδραση ίση με ωL

Νόμος του Ohm για ωμικές αντιστάσεις

- Νόμος του Ohm για ωμική αντίσταση R :

$$v = Ri \quad (2.14)$$

- Αντικαθιστώντας το ρεύμα από την εξίσωση (2.11):

- $v = \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t} \hat{I} \rangle = \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t} R\hat{I} \rangle$

- Οπότε τελικά:

$$\hat{V} = R\hat{I} \quad (2.15)$$

Σύνθετη αντίσταση ωμικής αντίστασης

- Από την (2.15):

$$\mathbf{Z}_R = R \quad (2.16)$$

- Άρα μία ιδανική αντίσταση έχει
 - ωμική αντίσταση R
 - επαγωγική αντίδραση ίση με μηδέν

Νόμος του Ohm για πυκνωτές

- Νόμος του Ohm για πυκνωτή C :

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (2.17)$$

- Αν τάση είναι ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$v(t) = \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t} \hat{V} \rangle \quad (2.18)$$

- Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$i = C \frac{d}{dt} \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t} \hat{V} \rangle = \text{Re}\langle \sqrt{2}e^{j\omega t} j\omega C \hat{V} \rangle$$

- Οπότε τελικά:

$$\hat{I} = j\omega C \hat{V} \quad (2.19)$$

Σύνθετη αντίσταση πυκνωτή

- Από την (2.19):

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (2.20)$$

- Άρα ένας ιδανικός πυκνωτής έχει
 - μηδενική ωμική αντίσταση
 - αρνητική επαγωγική αντίδραση ίση με $-\frac{1}{\omega C}$

Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα

- Η σύνθετη (ή μιγαδική) αγωγιμότητα ενός δικτύου είναι το αντίστροφο της σύνθετης που ορίστηκε στη (2.9):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{V}} = G + jB \quad (2.21)$$

- G : πραγματικό μέρος (ωμική αγωγιμότητα)
- B : φανταστικό μέρος (χωρητική αγωγιμότητα)

Σύνθετη (μιγαδική) αγωγιμότητα

- Αντικαθιστώντας στη (2.21) από την ($\mathbf{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = R + jX$ 2.9):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (2.22)$$

- Άρα η ωμική αγωγιμότητα είναι:

$$G = \text{Re}(\mathbf{Y}) = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (2.23)$$

- Και η χωρητική αγωγιμότητα είναι:

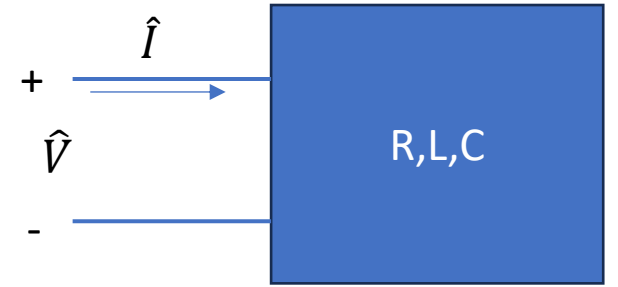
$$B = \text{Im}(\mathbf{Y}) = - \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (2.24)$$

- Από την (2.24), παρατηρούμε ότι μια αυτεπαγωγή έχει αρνητική χωρητική αγωγιμότητα ($B < 0$)

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ενεργός και άεργος ισχύς

Μιγαδική ισχύς



- Έστω ένα γραμμικό παθητικό δίκτυο, δηλαδή ένα ηλεκτρικό φορτίο που αποτελείται από αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία
- Το φορτίο τροφοδοτείται από τάση $\hat{V}$ και ρεύμα $\hat{I}$
- Η μιγαδική ισχύς που απορροφάται από το δίκτυο ορίζεται ως:
$$S = P + jQ = \hat{V} \hat{I}^* \quad (2.25)$$
- Από την προηγούμενη σχέση, βλέπουμε ότι η μιγαδική ισχύς έχει ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος

Περιεχόμενα

- Ενεργός και άεργος ισχύς
- Τριφασικά Συστήματα

Φαινόμενη ισχύς

- Έστω ότι το ρεύμα $\hat{I}$ είναι διάνυσμα αναφοράς ($\hat{I} = I \angle 0^\circ$) και η τάση $\hat{V}$ έχει πολική μορφή $\hat{V} = V \angle \theta$
- Οπότε η (2.25) γίνεται $\mathbf{S} = P + jQ = \hat{V} \hat{I}^* = VI \angle \theta$ (2.26)
- Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος, δηλαδή το VI ονομάζεται φαινόμενη ισχύς
- Η φάση της μιγαδικής ισχύος είναι ίση με τη διαφορά φάσεων τάσης και ρεύματος
- Μετράται σε Volt-Ampere, συντομογραφικά VA, και έχει πολλαπλάσια: kVA (10^3 VA), MVA (10^6 VA)

Ενεργός και άεργος ισχύς

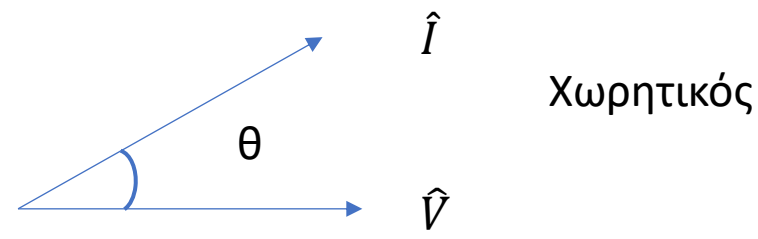
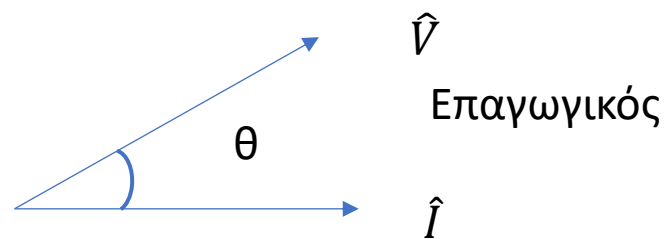
- Η **ενεργός ισχύς** ή **πραγματική ισχύς** ορίζεται ως το πραγματικό μέρος της μιγαδικής ισχύος
- Οπότε δίδεται από την σχέση $P = \text{Re}\{\mathbf{S}\} = VI \cos \theta$ (2.27)
 - Μονάδα μέτρησης: Watt (W), με πολλαπλάσια το kilowatt (kW) και το Megawatt (MW)
- Η **άεργος ισχύς** ορίζεται ως το φανταστικό μέρος της μιγαδικής ισχύος
- Οπότε δίδεται από την σχέση $Q = \text{Im}\{\mathbf{S}\} = VI \sin \theta$ (2.28)
 - Μονάδα μέτρησης: Volt-Ampere-reactive (Var), με πολλαπλάσια το kVar και το MVar

Συντελεστής ισχύος

- Ορίζουμε ως γωνία συντελεστή ισχύος την φάση της μιγαδικής ισχύος δηλαδή την γωνία θ της $S=VI\angle\theta$
- Ορίζουμε ως συντελεστή ισχύος το συνημίτονο της γωνίας θ :

$$\Sigma I = \cos\theta \quad (2.29)$$

- Από το συνημίτονο δε φαίνεται αν η γωνία θ είναι θετική ή αρνητική
- Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζουμε τον ΣI ως εξής:
 - Επαγωγικός ΣI : $\theta > 0$, δηλαδή η τάση προηγείται του ρεύματος
 - Χωρητικός ΣI : $\theta < 0$, δηλαδή το ρεύμα προηγείται της τάσης



Σχέση της μιγαδικής ισχύος S και της σύνθετης αντίστασης Z

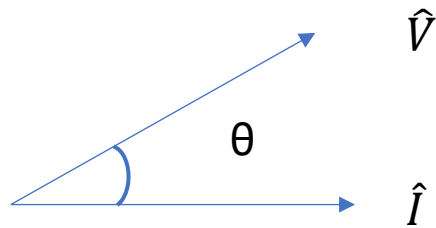
- Υπάρχει σχέση μεταξύ της μιγαδικής ισχύος και της σύνθετης αντίστασης ενός φορτίου
- Από τον ορισμό της Z (2.9) έχουμε

$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{V}{I} \angle \theta \quad (2.30)$$

- Η γωνία του SI είναι ίδια με την φάση της σύνθετης αντίστασης του φορτίου

Επαγωγική φόρτιση

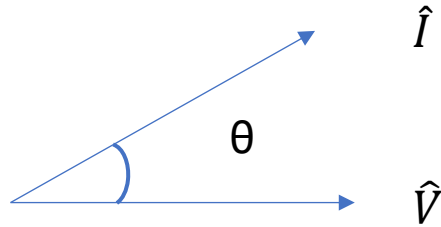
- Επαγωγική φόρτιση: όταν το φορτίο είναι επαγωγικό, η τάση προηγείται του ρεύματος, δηλαδή η γωνία θ είναι θετική και η άεργος ισχύς είναι θετική
 - Το επαγωγικό φορτίο απορροφά άεργο ισχύ
 - Ισοδύναμα: Το επαγωγικό φορτίο παράγει αρνητική άεργο ισχύ



Επαγωγική φόρτιση

Χωρητική φόρτιση

- Χωρητική φόρτιση: όταν το φορτίο είναι χωρητικό, η τάση ακολουθεί το ρεύμα, δηλαδή η γωνία θ είναι αρνητική και η άεργος ισχύς είναι αρνητική
 - Το χωρητικό φορτίο παράγει άεργο ισχύ
 - Ισοδύναμα: Το χωρητικό φορτίο απορροφά αρνητική άεργο ισχύ



Χωρητική φόρτιση

Ισχύς του φορτίου

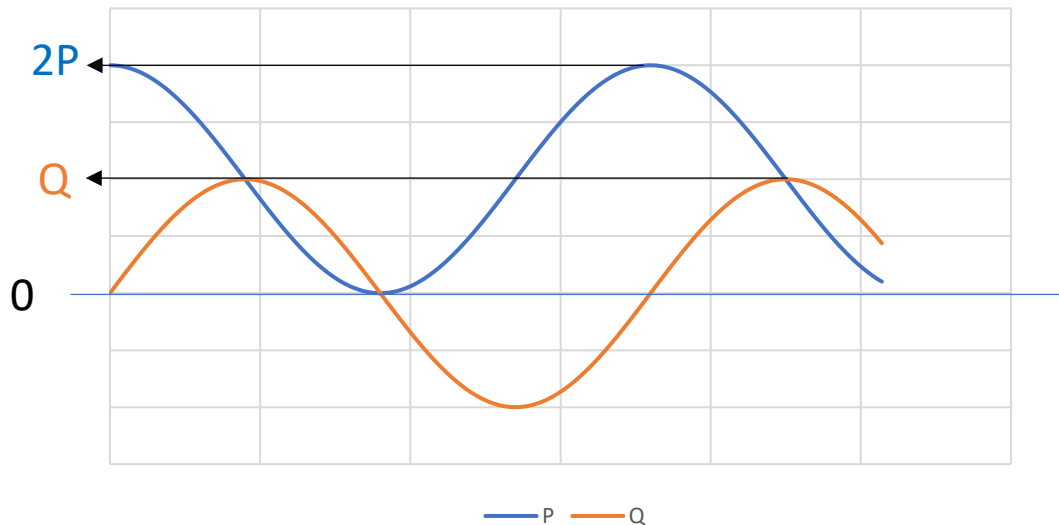
Η ισχύς που καταναλώνει το φορτίο συναρτήσει της σύνθετης αντίστασης αγωγιμότητας από την σχέση

$$\mathbf{s} = \hat{V} \left(\frac{\hat{V}}{\mathbf{z}} \right)^* = \frac{V^2}{\mathbf{z}^*} = V^2 \mathbf{Y}^* \quad (2.31)$$

Στιγμιαία ισχύς

- Η στιγμιαία ισχύς που απορροφά ένα γραμμικό παθητικό δίκτυο είναι:

$$p(t) = vi = 2VI\cos(\omega t)\cos(\omega t + \theta) = VI\cos\theta + VI\cos(2\omega t + \theta) = VI\cos\theta(1 + \cos 2\omega t) - VI\sin\theta \sin 2\omega t = P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t$$



$$P(1 + \cos 2\omega t) = p(t) - q(t)$$

$$q(t) = -Q \sin 2\omega t$$

$$P = \text{Re}\{\mathbf{S}\} = VI\cos\theta \quad (2.27)$$

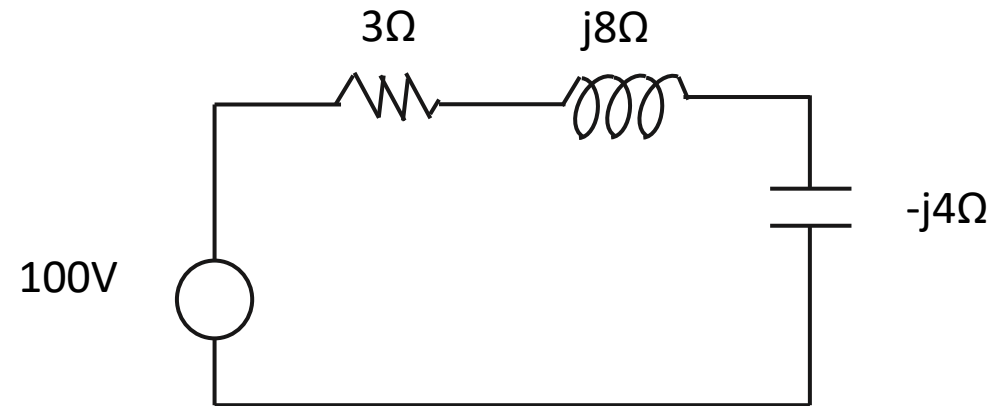
$$Q = \text{Im}\{\mathbf{S}\} = VI\sin\theta \quad (2.28)$$

Ενεργός Ισχύς

- Από την (2.26) προκύπτει ότι η ενεργός ισχύς είναι ίση με τη μέση τιμή της στιγμιαίας ισχύος:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (2.23)$$

Παράδειγμα 2.3.4



- Να υπολογιστεί η καταναλισκόμενη ισχύς συνολικά, και σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος
- Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:
- $Z = 3 + j8 - j4 = 3 + j4 = 5\Omega \angle 53.1^\circ$
- Το ρεύμα δίδεται από την σχέση
- $\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \frac{100V \angle 0^\circ}{5\Omega \angle 53.1^\circ} = 20A \angle -53.1^\circ$
- Η μιγαδική ισχύς που απορροφάται είναι
- $\mathbf{S} = \hat{V} \hat{I}^* = 100V \angle 0^\circ * 20A \angle 53.1^\circ = 2000VA \angle 53.1^\circ = 1200W + j1600Var$

Παράδειγμα 2.3.4

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει η αντίσταση R είναι:

$$\mathbf{S}_R = \widehat{V}_R \hat{I}^* = R \hat{I} \hat{I}^* = RI^2 = 1200W + j0$$

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει το πηνίο είναι:

$$\mathbf{S}_L = \widehat{V}_L \hat{I}^* = jX_L \hat{I} \hat{I}^* = jX_L I^2 = j3200\text{Var}$$

- Η μιγαδική ισχύς που καταναλώνει ο πυκνωτής είναι:

$$\mathbf{S}_C = \widehat{V}_C \hat{I}^* = jX_C \hat{I} \hat{I}^* = jX_C I^2 = -j1600\text{Var}$$

- Προφανώς

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_L + \mathbf{S}_C$$

Χρήσιμες Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$
- $\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$
- $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

Μερικές χρήσιμες τριγωνομετρικές τιμές

Μοίρες	Rad	cos	sin
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	0	1
120	$\frac{2\pi}{3}$	-0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5
180	π	-1	0