

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός α τέτοιος ώστε $\alpha^2 = 3$.

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n (μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m^2}{n^2} = 3.$$

Τότε $m^2 = 3n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και ο m είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει τότε ο m θα είναι της μορφής $3k + 1$ ή $3k + 2$. Τότε όμως $(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ ή $(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ αντίστοιχα. Δηλαδή ο m^2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άτοπο.

Επομένως $m = 3k$, για κάποιον φυσικό k , απ' όπου έπεται ότι $3n^2 = m^2 = 9k^2$. Τότε $n^2 = 3k^2 \implies$ ο n^2 άρα και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 3. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n είναι ο 1. $\square$

Άσκηση 2. (α) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{6}$ είναι άρρητος.

(β) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Υπόδειξη: (α) Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n (μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m}{n} = \sqrt{6}.$$

Τότε $m^2 = 6n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε ο m είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Έπεται ότι $m = 6k$ για κάποιον φυσικό $k \implies m^2 = 36k^2$. Συνεπώς, $n^2 = 6k^2 \implies$ ο n^2 άρα και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 6. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι m, n έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1.

(β) Αν υποθέσουμε ότι ο $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι ρητός, τότε και το τετράγωνό του θα είναι ρητός. Δηλαδή $2 + 3 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί τότε $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Άσκηση 3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει η ταυτότητα

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}.$$

Υπόδειξη: Για $n = 1$ η ζητούμενη ταυτότητα ισχύει: ελέγχουμε ότι

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot (1+3) \cdot (1+4)}{5}.$$

Έστω ότι η ταυτότητα

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

ισχύει για τον φυσικό n . Θα δείξουμε ότι ισχύει για τον $n + 1$, δηλαδή ότι

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{5}.$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\
 &= (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \left(\frac{n}{5} + 1 \right) \\
 &= (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \frac{n+5}{5} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{5}.
 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής συμπεραίνουμε ότι η ταυτότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Άσκηση 4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν οι ανισότητες

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

και

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Υπόδειξη: (α) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $1 < 2\sqrt{1}$, δηλαδή $1 < 2$ που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geq 1$ έχουμε $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$ και θα δείξουμε ότι

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) > \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Όμως, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συζυγή παράσταση βλέπουμε ότι

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

(β) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}}$, η οποία ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geq 1$ έχουμε $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ και θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $1 + \frac{3}{3k+1} = \frac{3k+4}{3k+1} \leq \left(\frac{2k+2}{2k+1} \right)^2 = \frac{4k^2+8k+4}{4k^2+4k+1} = 1 + \frac{4k+3}{4k^2+4k+1}$. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $3(4k^2+4k+1) \leq (3k+1)(4k+3)$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $12k^2 + 12k + 3 < 12k^2 + 13k + 3$, η οποία ισχύει αφού $k > 0$. $\square$

Άσκηση 5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{n+1}{2}.$$

Υπόδειξη: Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $1 \leq \frac{1+1}{2}$ που ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geq 1$ έχουμε $\sqrt[k]{k!} \leq \frac{k+1}{2}$, δηλαδή $k! \leq \frac{(k+1)^k}{2^k}$, και θα δείξουμε ότι $\sqrt[k+1]{(k+1)!} \leq \frac{k+2}{2}$, δηλαδή $(k+1)! \leq \frac{(k+2)^{k+1}}{2^{k+1}}$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$(k+1)! = k! (k+1) \leq \frac{(k+1)^k}{2^k} (k+1) = \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k},$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{2^k} \leq \frac{(k+2)^{k+1}}{2^{k+1}}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} \geq 2.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$ με $a = \frac{1}{k+1}$ και $n = k+1$ βλέπουμε ότι

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot \frac{1}{k+1} = 1 + 1 = 2,$$

το οποίο αποδεικνύει το επαγωγικό βήμα.

Άλλος τρόπος: Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

□

Άσκηση 6. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι ίσο με 2^n .

Υπόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση

$\Pi(n)$: Αν το S έχει n στοιχεία τότε το S έχει ακριβώς 2^n υποσύνολα.

Αν $n = 1$ τότε το S είναι μονοσύνολο και έχει ακριβώς δύο υποσύνολα, το $\emptyset$ και το S . Συνεπώς, η $\Pi(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ αληθεύει. Έστω $S = \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ ένα σύνολο με $(k+1)$ στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο

$$T = S \setminus \{x_{k+1}\} = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Το T έχει k στοιχεία, οπότε έχει 2^k υποσύνολα. Τώρα, κάθε υποσύνολο του S θα περιέχει ή δεν θα περιέχει το x_{k+1} . Τα υποσύνολα του S που δεν περιέχουν το x_{k+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του T , δηλαδή το πλήθος τους είναι 2^k . Από την άλλη πλευρά, κάθε υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του T με την προσθήκη του x_{k+1} (αντίστροφα, κάθε υποσύνολο του T προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} με την αφαίρεση του x_{k+1}). Δηλαδή, το πλήθος των υποσυνόλων του S που περιέχουν το x_{k+1} είναι 2^k (όσα είναι τα υποσύνολα του T). Έπεται ότι το συνολικό πλήθος των υποσυνόλων του S είναι

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Δηλαδή, η $\Pi(k+1)$ αληθεύει.

Συνεπώς, η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

□

Άσκηση 7. Ένας φυσικός αριθμός $p > 1$ λέγεται πρώτος αν οι μόνοι φυσικοί αριθμοί που διαιρούν τον p είναι ο 1 και ο p . Αποδείξτε με επαγωγή ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων, δηλαδή υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και (όχι απαραίτητα διακεκριμένοι) πρώτοι $p_1, \dots, p_k$ τέτοιοι ώστε $n = p_1 p_2 \cdots p_k$.

Υπόδειξη: Αρχικά, να σημειώσουμε ότι κάθε πρώτος θεωρείται γινόμενο πρώτων (με έναν όρο). Θεωρούμε την πρόταση $P(n)$: «ο n γράφεται ως γινόμενο πρώτων». Δείχνουμε με την ισχυρή μορφή της επαγωγής ότι η $P(n)$ ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq 2$.

Για την $P(2)$ παρατηρούμε ότι ο 2 είναι πρώτος (άρα, γινόμενο πρώτων με έναν όρο). Συνεπώς, η $P(2)$ ισχύει.

Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $2 \leq k \leq n$ ισχύει η $P(k)$, δηλαδή ότι κάθε $2 \leq k \leq n$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων, και θα δείξουμε ότι ο $n + 1$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων (δηλαδή, ισχύει η $P(n + 1)$). Αν ο $n + 1$ είναι πρώτος, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν ο $n + 1$ δεν είναι πρώτος, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $2 \leq k_1, k_2 \leq n$ και $n + 1 = k_1 k_2$. Από την επαγωγική υπόθεση, καθένας από τους k_1, k_2 γράφεται ως γινόμενο πρώτων, οπότε το ίδιο ισχύει και για τον $n + 1 = k_1 k_2$. Πράγματι, αν $k_1 = p_1 \cdots p_s$ και $k_2 = q_1 \cdots q_m$, όπου οι p_i, q_j είναι πρώτοι, τότε $n + 1 = p_1 \cdots p_s q_1 \cdots q_m$ που είναι γινόμενο πρώτων.