

Μαθηματική Ανάλυση Ι, ΣΕΜΦΕ 2025-2026
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 1

Άσκηση 1. (α) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.

(Υπόδειξη: με επαγωγή ως προς το πλήθος των στοιχείων του υποσυνόλου)

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) δώστε μια άλλη απόδειξη της ιδιότητας της Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$: κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

(Υπόδειξη: Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό, θεωρείστε την διάσπαση $A = \{n \in A : n \leq n_0\} \cup \{n \in A : n > n_0\}$ όπου n_0 ένα τυχόν στοιχείο του A .)

Λύση. (α) Έστω $p(n)$ η πρόταση:

Αν $F \subseteq \mathbb{R}$ με $|F| = n$ τότε το F έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο

(με $|F|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του F).

Όταν $n = 1$ το F είναι μονοσύνολο, $F = \{x\}$ και άρα $\max F = \min F = x$. Έστω ότι η $p(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και έστω $F \subseteq \mathbb{R}$ με $|F| = n + 1$. Αν $F = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, θέτουμε $F' = \{x_1, \dots, x_n\}$. Αφού η $p(n)$ ισχύει και $|F'| = n$, το F' έχει ελάχιστο και μέγιστο. Παρατηρούμε ότι $\max F = \max(\max F', x_{n+1})$ και $\min F = \min(\min F', x_{n+1})$. Άρα ισχύει η $p(n + 1)$. Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής η $p(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό και έστω $n_0 \in A$. Έστω $A_{n_0} = \{n \in A : n \leq n_0\}$. Το A_{n_0} είναι πεπερασμένο αφού έχει το πολύ n_0 στοιχεία, μη κενό ($n_0 \in A_{n_0}$) και άρα από το (α) έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω $a_0 = \min A_{n_0}$. Ισχυριζόμαστε ότι $a_0 = \min A$. Πράγματι, έστω $a \in A$. Τότε είτε $a \leq n_0$ ή $a > n_0$. Αν $a \leq n_0$ τότε $a \in A_{n_0}$ και άρα $a_0 \leq a$ (αφού $a_0 = \min A_{n_0}$). Αν $a > n_0$ τότε πάλι $a > a_0$, αφού $n_0 \geq a_0$. Άρα $a \geq a_0$ για κάθε $a \in A$.

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Λύση. Αν $n = 1$ τότε $A = \{a_1\}$ μονοσύνολο και άρα το A έχει δύο υποσύνολα το $\emptyset$ και το ίδιο το A . Άρα η πρόταση ισχύει για $n = 1$. Έστω ότι η $p(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Έστω $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ ένα σύνολο με $n + 1$ στοιχεία. Θέτουμε $A' = \{a_1, \dots, a_n\}$. Το A' έχει n -στοιχεία και άρα από επαγωγική υπόθεση έχει 2^n υποσύνολα. Παρατηρούμε ότι τα υποσύνολα του A χωρίζονται σε δύο ξένα μέρη: Σε αυτά τα υποσύνολα που δεν περιέχουν το a_{n+1} και σε εκείνα που το περιέχουν. Αυτά που δεν περιέχουν το a_{n+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του A' και άρα είναι 2^n το πλήθος. Από την άλλη μεριά, ένα υποσύνολο $F \subseteq A$ που περιέχει το a_{n+1} γράφεται στην μορφή $F = F' \cup \{a_{n+1}\}$ με $F' \subseteq A'$. Παρατηρούμε επίσης ότι αυτή η αντιστοιχία $F \rightarrow F'$ για τα $F \subseteq A$ με $a_{n+1} \in F$ είναι 1-1. Άρα πάλι τα υποσύνολα του A που περιέχουν το a_{n+1} είναι και αυτά 2^n το πλήθος. Συνεπώς όλα τα υποσύνολα του A είναι $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ το πλήθος.

Άσκηση 3. Έστω A, B μη κενά πεπερασμένα σύνολα. Αποδείξτε ότι το πλήθος όλων των απεικονίσεων $f : A \rightarrow B$ είναι m^n όπου m το πλήθος των στοιχείων του B και n το πλήθος των στοιχείων του A .

(Υπόδειξη: Σταθεροποιείτε ένα πεπερασμένο μη κενό B και αποδείξτε την πρόταση με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του A .)

Λύση. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ μη κενό σύνολο με πλήθος στοιχείων m . Έστω $p(n)$ η πρόταση:

Για κάθε σύνολο A με πλήθος στοιχείων n το πλήθος όλων των απεικονίσεων $f : A \rightarrow B$ είναι m^n

Για $n = 1$, η $p(1)$ ισχύει. Πράγματι στην περίπτωση αυτή το $A = \{a\}$ είναι μονοσύνολο και οι απεικονίσεις $f : A \rightarrow B$ είναι οι $f_1, \dots, f_m$ όπου $f_i(a) = b_i$, $1 \leq i \leq m$.

Έστω ότι η $p(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και έστω $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ ένα σύνολο με $n + 1$ σημεία. Έστω $\mathcal{F}$ τό σύνολο όλων των απεικονίσεων από το A στο B . Για κάθε $1 \leq i \leq m$ θέτουμε

$$\mathcal{F}_i = \{f \in \mathcal{F} : f(a_{n+1}) = b_i\}$$

Πέρνοντας τον περιορισμό κάθε $f : A \rightarrow B$ στο A' παρατηρούμε ότι το $\mathcal{F}_i$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο όλων των απεικονίσεων από n -σύνολο $A' = \{a_1, \dots, a_n\}$ στο B . Άρα, από την επαγωγική μας υπόθεση το πλήθος του $\mathcal{F}_i$ είναι m^n . Τα $\mathcal{F}_i$ αποτελούν μια διαμέριση του $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_m \text{ και } \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset \text{ για } i \neq j$$

έχουμε

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + \dots + |\mathcal{F}_m| = \underbrace{m^n + \dots + m^n}_{m\text{-φορές}} = m \cdot m^n = m^{n+1}$$

Από Μαθηματική Επαγωγή η $p(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 4. Έστω A, B μη κενά σύνολα και έστω $f : A \rightarrow B$. Η f καλείται 1-1 αν για κάθε $a_1, a_2 \in A$ με $a_1 \neq a_2$ ισχύει ότι $f(a_1) \neq f(a_2)$. Επίσης η f καλείται επί αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ με $b = f(a)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε ζεύγος συνόλων A, B με πλήθος στοιχείων $|A| = |B| = n$ το πλήθος όλων των 1-1 και επί απεικονίσεων $f : A \rightarrow B$ είναι $n!$. (όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$).

Λύση. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Άσκησης 3. Για $n = 1$ είναι προφανές (μια μοναδική απεικόνιση). Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και έστω $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ και $B = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ δύο σύνολα με $n+1$ στοιχεία. Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των 1-1 και επί απεικονίσεων $f : A \rightarrow B$. Για κάθε $1 \leq i \leq n+1$ θέτουμε

$$\mathcal{F}_i = \{f \in \mathcal{F} : f(a_{n+1}) = b_i\}$$

Παρατηρούμε ότι αν $f \in \mathcal{F}_i$ τότε ο περιορισμός της f στο $A' = \{a_1, \dots, a_n\}$ είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση από το A' στο $B'_i = \{b_j \in B : j \neq i\}$. Επειδή $|A'| = |B'_i| = n$ από την επαγωγική μας υπόθεση έπεται ότι για κάθε $1 \leq i \leq n+1$ το πλήθος του κάθε $\mathcal{F}_i$ ισούται με $n!$. Άρα το πλήθος του $\mathcal{F}$ είναι

$$\underbrace{n! + \dots + n!}_{(n+1)\text{-φορές}} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Άσκηση 5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και έστω $M_0 \in \mathbb{R}$. Αν κάθε $M > M_0$ είναι άνω φράγμα του A δείξτε ότι το M_0 είναι άνω φράγμα του A .

Λύση. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το M_0 δεν είναι άνω φράγμα του A . Τότε θα υπήρχε $a \in A$ με $M_0 < a$. Έστω

$$M = \frac{M_0 + a}{2}$$

Τότε

$$M_0 < M < a$$

και άρα το M ενώ είναι γνήσια μεγαλύτερο του M_0 δεν είναι άνω φράγμα του A , άτοπο.

Άσκηση 6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $s = \sup A$. Είναι σωστό ή όχι ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < a < s$;

Λύση. Όχι δεν είναι σωστό. Για παράδειγμα $A = (0, 1) \cup \{2\}$. Τότε $s = \sup A = \max A = 2$ και για $\varepsilon = 1/2$ δεν υπάρχει $a \in A$ με $s - \varepsilon < a < s$. Ισχύει βέβαια ότι υπάρχει $a \in A$ με $s - \varepsilon < a \leq s$ (το $a = s$).

Άσκηση 7. Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά με το B φραγμένο. Δείξτε ότι και το A είναι φραγμένο και ότι

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Λύση. Επειδή κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B έπεται ότι κάθε άνω (ή κάτω) φράγμα του B είναι και άνω (αντ. κάτω) φράγμα του A (αν $m \leq b \leq M$ για κάθε $b \in B$ τότε και $m \leq a \leq M$ για κάθε $a \in A$). Ειδικότερα, επειδή το $\sup B$ ως άνω φράγμα του B είναι και άνω φράγμα του A και άρα

$$\sup A \leq \sup B$$

διότι το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A . Όμοια το $\inf B$ ως κάτω φράγμα του B είναι και κάτω φράγμα του A και άρα

$$\inf B \leq \inf A$$

διότι το $\inf A$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A . Τέλος $\inf A \leq a \leq \sup A$ για όλα τα $a \in A$ και άρα $\inf A \leq \sup A$.

Άσκηση 8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο και έστω $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$. Αν $I = [x, y]$ κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq I$ δείξτε ότι $A \subseteq [\tau, s] \subseteq I$, δηλαδή το $[\tau, s]$ είναι το μικρότερο κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ που περιέχει το A .

Λύση. Αφού $A \subseteq [x, y]$ έχουμε ότι $x \leq a \leq y$ για κάθε $a \in A$. Άρα x κάτω φράγμα του A και y άνω φράγμα του A . Οπότε $x \leq \inf A = \tau$ και $s = \sup A \leq y$. Άρα $x \leq \tau \leq s \leq y$ οπότε $[\tau, s] \subseteq I$.

Άσκηση 9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο και έστω $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$. Ορίζουμε την *διάμετρο* του A να είναι ο αριθμός $\text{diam}(A) = \sup\{a - a' : a, a' \in A\}$. Δείξτε ότι $\text{diam}(A) = s - \tau$.

Λύση. Έστω $a, a' \in A$. Επειδή $\tau \leq a, a' \leq s$ έχουμε ότι $a - a' \leq s - \tau$. Άρα το $s - \tau$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{a - a' : a, a' \in A\}$ οπότε

$$\text{diam}(A) = \sup\{a - a' : a, a' \in A\} \leq s - \tau$$

Δείχνουμε τώρα ότι δεν μπορεί να ισχύει ότι $\text{diam}(A) < s - \tau$ και άρα $\text{diam}(A) = s - \tau$.

Πράγματι, έστω $\text{diam}(A) < s - \tau$ και έστω

$$\varepsilon = s - \tau - \text{diam}(A)$$

η διαφορά τους. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum και infimum υπάρχουν $a_1, a_2 \in A$ με

$$a_1 < \tau + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad s - \frac{\varepsilon}{2} < a_2$$

οπότε

$$a_2 - a_1 > s - \tau - \varepsilon = \text{diam}(A)$$

άτοπο αφού $\text{diam}(A) = \sup\{a - a' : a, a' \in A\}$.

Άσκηση 10. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $0 \leq b - a < \varepsilon$.

Λύση. Έστω $s = \sup A = \inf B$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum και infimum για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq s \leq b < s + \frac{\varepsilon}{2},$$

οπότε

$$0 \leq b - a < \varepsilon$$

Άσκηση 11. Έστω $A, B \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a \leq b$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

Λύση. Από την υπόθεση έπεται ότι κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του A , οπότε $\sup A \leq b$ για οποιοδήποτε $b \in B$, αφού το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A . Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι το $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B και άρα $\sup A \leq \inf B$ αφού το $\inf B$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του B .

Άσκηση 12. Έστω $A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Βρείτε το $\inf A$ και δείξτε ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $x^2 + y^2 \geq 2xy$ έχουμε

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{m^2 + 4n^2}{nm} \geq \frac{4mn}{mn} = 4$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $m = 2n$. Άρα $\inf A = \min A = 4$.

Απο την άλλη μεριά, αν $m = 1$ τότε

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{1}{n} + 4n \geq 4n \geq n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a \in A$ με $a \geq n$. Επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο έχουμε ότι και το A δεν είναι άνω φραγμένο.

Άσκηση 13. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ με $b \geq a$.

(α) Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι και το B δεν είναι άνω φραγμένο.

(β) Αν το B είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι και το A είναι άνω φραγμένο και $\sup A \leq \sup B$.

Λύση. (α) Θα δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός δεν είναι άνω φράγμα του A . Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αφού το A δεν είναι άνω φραγμένο υπάρχει $a \in A$ με $a > x$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $b \in B$ με $b \geq a$ και άρα $b > x$.

(β) Θα δείξουμε ότι κάθε άνω φράγμα του B είναι και άνω φράγμα του A . Αυτό ειδικότερα σημαίνει ότι το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A και άρα $\sup A \leq \sup B$ αφού το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A . Έστω M άνω φράγμα του B και έστω $a \in A$ τυχαίο στοιχείο του. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $b \in B$ με $b \geq a$ και άρα $a \leq b \leq M \Rightarrow a \leq M$. Επειδή το a ήταν ένα οποιοδήποτε στοιχείο του A έχουμε ότι το M είναι άνω φράγμα του A .

Άσκηση 14. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ρητών αριθμών δείξτε ότι

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < a\} = \inf\{q \in \mathbb{Q} : q > a\} = a$$

Λύση. Έστω $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$. Το a είναι άνω φράγμα του A και άρα $\sup A \leq a$ (το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα). Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\sup A < a$. Λόγω πυκνότητας ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $\sup A < q < a$. Αλλά τότε $q \in A \Rightarrow q \leq \sup A$ (αφού $q \in \mathbb{Q}$ και $q < a$). Άτοπο αφού ταυτόχρονα $q > \sup A$.

Ομοίως έστω $B = \{q \in \mathbb{Q} : q > a\}$. Το a είναι κάτω φράγμα του B και άρα $a \leq \inf B$ (το $\inf B$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα). Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $a < \inf B$. Λόγω πυκνότητας ρητών στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < \inf B$. Αλλά τότε $q \in B \Rightarrow \inf B \leq q$ (αφού $q \in \mathbb{Q}$ και $a < q$). Άτοπο, αφού ταυτόχρονα $\inf B < q$.

Άσκηση 15. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Θέτουμε $-A = \{-a : a \in A\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(-A) = -\inf A \text{ και } \inf(-A) = -\sup A$$

Λύση. Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\text{Το } x \text{ είναι κάτω φράγμα του } A \Leftrightarrow \text{Το } -x \text{ είναι άνω φράγμα του } -A \quad (1)$$

Πράγματι, x κάτω φράγμα του $A \Leftrightarrow x \leq a \forall a \in A \Leftrightarrow -x \geq -a, \forall a \in A \Leftrightarrow -x$ άνω φράγμα του $-A$.

Η (1) διατυπώνεται και ισοδύναμα με αρνήσεις ως εξής

$$\text{Το } x \text{ δεν είναι κάτω φράγμα του } A \Leftrightarrow \text{Το } -x \text{ δεν είναι άνω φράγμα του } -A \quad (2)$$

Από την (1) και (2) μπορούμε να δούμε ότι

$$\text{Το } x \in \mathbb{R} \text{ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του } A \Leftrightarrow \text{Το } -x \text{ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του } -A$$

Με άλλα λόγια $x = \inf A \Leftrightarrow -\inf A = \sup(-A) \Leftrightarrow \sup(-A) = -\inf A$ Θέτοντας $-A$ στην θέση του A παίρνουμε $\sup(-(-A)) = -\inf(-A) \Rightarrow \sup A = -\inf(-A) \Rightarrow \inf(-A) = -\sup A$.

Άσκηση 16. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και άνω φραγμένα. Δείξτε ότι το $A \cup B$ είναι άνω φραγμένο και $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Λύση. Η ένωση $A \cup B$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι έστω M_1 ένα άνω φράγμα του A και M_2 ένα άνω φράγμα του B . Αν $M = \max\{M_1, M_2\}$ τότε $a \leq M_1 \leq M$ και $b \leq M_2 \leq M$ για όλα τα $a \in A$ και $b \in B$. Άρα $c \leq M$ για όλα τα $c \in A \cup B$. Ειδικότερα αν $M_1 = \sup A$ και $M_2 = \sup B$ τότε το $\max\{\sup A, \sup B\}$ είναι άνω φράγμα του $A \cup B$. Άρα

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\} \quad (3)$$

διότι το $\sup(A \cup B)$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του $A \cup B$. Από την άλλη μεριά, $A \subseteq A \cup B$ και άρα $\sup A \leq \sup(A \cup B)$. Ομοίως $B \subseteq A \cup B$ και άρα $\sup B \leq \sup(A \cup B)$ (δείτε Άσκηση 7». Συνεπώς,

$$\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B) \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) παίρνουμε $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Άσκηση 17. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και κάτω φραγμένα. Δείξτε ότι $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Λύση. Η ένωση $A \cup B$ είναι κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι έστω m_1 ένα κάτω φράγμα του A και m_2 ένα κάτω φράγμα του B . Αν $m = \min\{m_1, m_2\}$ τότε $m \leq m_1 \leq a$ και $m \leq m_2 \leq b$ για όλα τα $a \in A$ και $b \in B$. Άρα $m \leq c$ για όλα τα $c \in A \cup B$. Ειδικότερα αν $m_1 = \inf A$ και $m_2 = \inf B$ τότε το $\min\{\inf A, \inf B\}$ είναι κάτω φράγμα του $A \cup B$. Άρα

$$\min\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cup B) \quad (5)$$

διότι το $\inf(A \cup B)$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του $A \cup B$. Από την άλλη μεριά, $A \subseteq A \cup B$ και άρα $\inf(A \cup B) \leq \inf A$. Ομοίως $B \subseteq A \cup B$ και άρα $\inf(A \cup B) \leq \inf B$ (δείτε Άσκηση 7». Συνεπώς,

$$\inf(A \cup B) \leq \min\{\inf A, \inf B\} \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) παίρνουμε $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Άσκηση 18. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Δείξτε ότι αν τα A και B είναι άνω φραγμένα, τότε $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Λύση. Επειδή $a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$ και ομοίως $b \leq \sup B$ για κάθε $b \in B$ έχουμε ότι

$$a + b \leq \sup A + \sup B$$

για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ και άρα το $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του $A + B$, οπότε

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$$

Μένει να δειχθεί ότι η περίπτωση $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$ δεν μπορεί να συμβεί.

Πράγματι έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$. Θέτουμε $\varepsilon = \sup A + \sup B - \sup(A + B)$. Επειδή $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < \sup A$ υπάρχει $a \in A$ με $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a$. Ομοίως υπάρχει $b \in B$ με $\sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b$. Άρα

$$a + b > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\sup B - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A + \sup B - \varepsilon = \sup(A + B)$$

άτοπο. Άρα $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Άσκηση 19. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα θετικών πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

Δείξτε ότι αν τα A και B είναι άνω φραγμένα, τότε $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$.

Λύση. Επειδή $0 < a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$ και ομοίως $0 < b \leq \sup B$ για κάθε $b \in B$ έχουμε ότι $0 < ab \leq \sup A \cdot \sup B$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ και άρα το $\sup A \cdot \sup B$ είναι άνω φράγμα του AB , οπότε

$$\sup(AB) \leq \sup A \cdot \sup B$$

Μένει τώρα να αποκλεισθεί η περίπτωση $\sup(AB) < \sup A \cdot \sup B$. Πράγματι, έστω ότι $\sup(AB) < \sup A \cdot \sup B$. Θέτουμε

$$\epsilon = \frac{\sup A \cdot \sup B - \sup(AB)}{\sup A + \sup B}$$

Τότε $\sup A, \sup B > \epsilon > 0$ (γιατί;) Άρα υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με

$$a > \sup A - \epsilon > 0 \quad \text{και} \quad b > \sup B - \epsilon > 0$$

Αλλά τότε

$$ab > (\sup A - \epsilon)(\sup B - \epsilon) = \sup A \cdot \sup B - \epsilon(\sup A + \sup B) + \epsilon^2 = \sup(AB) + \epsilon^2 > \sup(AB)$$

άτοπο, αφού $ab \in AB$ και άρα θα πρέπει $ab \leq \sup(AB)$.