

Μαθηματική Ανάλυση Ι ΣΕΜΦΕ 2025-2026
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

Άσκηση 1. (α) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.

(Υπόδειξη: με επαγωγή ως προς το πλήθος των στοιχείων του υποσυνόλου)

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) δώστε μια άλλη απόδειξη της ιδιότητας της Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$: κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

(Υπόδειξη: Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ μη κενό, θεωρείστε την διάσπαση $A = \{n \in A : n \leq n_0\} \cup \{n \in A : n > n_0\}$ όπου n_0 ένα τυχόν στοιχείο του A .)

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Άσκηση 3. Έστω A, B μη κενά πεπερασμένα σύνολα. Αποδείξτε ότι το πλήθος όλων των απεικονίσεων $f : A \rightarrow B$ είναι m^n όπου m το πλήθος των στοιχείων του B και n το πλήθος των στοιχείων του A .

(Υπόδειξη: Σταθεροποιείτε ένα πεπερασμένο μη κενό B και αποδείξτε την πρόταση με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του A .)

Άσκηση 4. Έστω A, B μη κενά σύνολα και έστω $f : A \rightarrow B$. Η f καλείται $1-1$ αν για κάθε $a_1, a_2 \in A$ με $a_1 \neq a_2$ ισχύει ότι $f(a_1) \neq f(a_2)$. Επίσης η f καλείται $\epsilon\pi\acute{\iota}$ αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ με $b = f(a)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε ζεύγος συνόλων A, B με πλήθος στοιχείων $|A| = |B| = n$ το πλήθος όλων των $1-1$ και $\epsilon\pi\acute{\iota}$ απεικονίσεων $f : A \rightarrow B$ είναι $n!$. (όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$).

Άσκηση 5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και έστω $M_0 \in \mathbb{R}$. Αν κάθε $M > M_0$ είναι άνω φράγμα του A δείξτε ότι το M_0 είναι άνω φράγμα του A .

Άσκηση 6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $s = \sup A$. Είναι σωστό ή όχι ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < a < s$;

Άσκηση 7. Έστω $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά με το B φραγμένο. Δείξτε ότι και το A είναι φραγμένο και ότι

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Άσκηση 8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο και έστω $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$. Αν $I = [x, y]$ κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq I$ δείξτε ότι $A \subseteq [\tau, s] \subseteq I$, δηλαδή το $[\tau, s]$ είναι το μικρότερο κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ που περιέχει το A .

Άσκηση 9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο και έστω $s = \sup A$ και $\tau = \inf A$. Ορίζουμε την *διάμετρο* του A να είναι ο αριθμός $\text{diam} A = \sup\{a - a' : a, a' \in A\}$. Δείξτε ότι $\text{diam} A = s - \tau$.

Άσκηση 10. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $0 \leq b - a < \epsilon$.

Άσκηση 11. Έστω $A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Βρείτε το $\inf A$ και δείξτε ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο.

Άσκηση 12. Έστω $A, B \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a < b$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

Άσκηση 13. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ με $b \geq a$.

(α) Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι και το B δεν είναι άνω φραγμένο.

(β) Αν το B είναι άνω φραγμένο δείξτε ότι και το A είναι άνω φραγμένο και $\sup A \leq \sup B$.

Άσκηση 14. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ρητών αριθμών δείξτε ότι

$$\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < a\} = \inf\{q \in \mathbb{Q} : q > a\} = a$$

Άσκηση 15. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και άνω φραγμένα. Δείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Άσκηση 16. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και κάτω φραγμένα. Δείξτε ότι $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Άσκηση 17. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Θέτουμε $-A = \{-a : a \in A\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(-A) = -\inf A \text{ και } \inf(-A) = -\sup A$$

Άσκηση 18. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Θέτουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι αν τα A και B είναι άνω φραγμένα, τότε

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Άσκηση 19. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα θετικών πραγματικών αριθμών. Θέτουμε $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι αν τα A και B είναι άνω φραγμένα, τότε

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$$