

ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
(2ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. Έστω X χώρος με νόρμα και U υποσύνολο του X . Να δείξετε ότι το U είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) του U με $\lim x_n = x$ έχουμε ότι $x \in U$.

Ασκηση 2. Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X . Να δείξετε ότι η κλειστότητα $\bar{Y}$ του Y είναι επίσης υπόχωρος του X .

Ασκηση 3. Έστω Y υπόχωρος του χώρου Banach $(X, \|\cdot\|)$. Να δείξετε ότι ο $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν ο Y είναι κλειστός.

Ασκηση 4. Έστω X χώρος με νόρμα.

(i) Ένα υποσύνολο C του X καλείται κυρτό αν για κάθε $x, y \in C$ και $t \in [0, 1]$

$$tx + (1 - t)y \in C.$$

Να δείξετε ότι η $B(0, 1)$ είναι κυρτό σύνολο.

(ii) Ένα κυρτό υποσύνολο C του X καλείται γνήσια κυρτό αν για κάθε $x, y \in C$ και $t \in (0, 1)$

$$tx + (1 - t)y \in C^\circ.$$

Η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στον $\mathbb{R}^2$ ορίζεται με τον τύπο

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \text{ για } x = (x_1, x_2).$$

Είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ γνήσια κυρτή;

Ασκηση 5. Να δείξετε ότι αν η ακολουθία (f_n) του $C([a, b])$ συγκλίνει στην $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα, τότε $f \in C([a, b])$.