

ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση
(1ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. Έστω X χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι η ανοικτή μπάλλα κέντρου x και ακτίνας $\varepsilon > 0$ είναι ανοικτό σύνολο.

Ασκηση 2. Έστω X χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι

(i) η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

(ii) η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Ασκηση 3 (ανισότητα Young). Έστω $a, b \geq 0$ και $p, q > 1$, τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Να δείξετε ότι

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ασκηση 4 (ανισότητα Hölder). Έστω $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ και $p, q > 1$, τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ασκηση 5 (ανισότητα Minkowski). Έστω $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ και $p \geq 1$. Να δείξετε ότι

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$