

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΔΟΜΩΝ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο θα μελετήσουμε, όσο γίνεται πιο σύντομα, μερικές βασικές αλγεβρικές έννοιες που μας είναι αναγκαίες στη μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας. Τέτοιες είναι η έννοια της ομάδας, του δακτυλίου, του σώματος και του πολυωνύμου.

Είναι γνωστό από τη Μέση Εκπαίδευση, ότι σε διάφορα σύνολα αριθμών, όπως το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, έχουμε ορίσει διάφορες πράξεις, όπως πρόσθεση και πολλαπλασιασμό. Εδώ θα ταξινομήσουμε τα διάφορα σύνολα με βάση τις ιδιότητες των πράξεων με τις οποίες είναι εφοδιασμένα. Είναι φανερό ότι διαφορετικά σύνολα εφοδιασμένα με πράξεις που ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες μπορούν να μελετηθούν ταυτόχρονα. Στα επόμενα θεωρούμε γνωστές τις βασικές έννοιες των συνόλων.

1.1 Σχέση – Σχέση ισοδυναμίας

Ορισμός 1.1.1 Σχέση ή διμελής σχέση S από το σύνολο A στο σύνολο B είναι ένα υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $A \times B$.

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε:

- Για κάθε $(\alpha, \beta) \in A \times B$ ισχύει ότι: $(\alpha, \beta) \in S$ ή $(\alpha, \beta) \notin S$.
- Αν $A=B$, τότε η σχέση S λέγεται σχέση στο σύνολο A .

Ορισμός 1.1.2 Μία σχέση S στο σύνολο A λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** στο σύνολο A , αν ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

- (i) $(\alpha, \alpha) \in S$, για κάθε $\alpha \in A$, (ανακλαστική ιδιότητα)
- (ii) αν $(\alpha, \beta) \in S$, τότε και $(\beta, \alpha) \in S$, (συμμετρική ιδιότητα)
- (iii) αν $(\alpha, \beta) \in S$ και $(\beta, \gamma) \in S$, τότε $(\alpha, \gamma) \in S$, (μεταβατική ιδιότητα)

Παρατήρηση

Ένας συνηθής τρόπος συμβολισμού μιας σχέσης ισοδυναμίας στο σύνολο A είναι με το σύμβολο $\sim$ ή $\equiv$, που διαβάζεται «**ισοδύναμο**». Στη περίπτωση αυτή, για κάθε ζεύγος (α, β) που ανήκει στη σχέση γράφουμε

$$\alpha \sim \beta \text{ ή } \alpha \equiv \beta.$$

Κλάσεις ισοδυναμίας

Αν S είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A και $\alpha \in A$, το σύνολο των στοιχείων x του A που είναι ισοδύναμα με το α , λέγεται **κλάση ισοδυναμίας** του α και συμβολίζεται με $[\alpha]$ ή $\hat{\alpha}$, δηλαδή είναι

$$[\alpha] = \{x : x \in A \text{ με } (x, \alpha) \in S\}.$$

Κάθε $x \in [\alpha]$ λέγεται **αντιπρόσωπος** της κλάσης ισοδυναμίας $[\alpha]$. Με χρήση του ορισμού εύκολα αποδεικνύονται τα εξής:

$$[\alpha] = [\beta] \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in S$$

$$[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \notin S$$

Επομένως δύο κλάσεις ισοδυναμίας που δεν είναι ίσες, είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους.

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με A/S και αποτελεί μία **διαμέριση** του συνόλου A , αφού οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι μη κενά σύνολα, ανά δύο ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι το σύνολο A . Το σύνολο A/S λέγεται **σύνολο πηλίκου** του A ως προς τη σχέση ισοδυναμίας S .

Παράδειγμα 1. Στο σύνολο $A = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} : \alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}^* \right\}$ ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ ως εξής:

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma.$$

Η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου του A ονομάζεται **ρητός αριθμός**.

Παράδειγμα 2. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας $\equiv (\text{mod } n)$ ως εξής:

$$x \equiv y (\text{mod } n) \Leftrightarrow x - y = kn, k \in \mathbb{Z}.$$

Διαβάζουμε: x **ισοϋπόλοιπο** με το y **modulo** n .

Οι κλάσεις ισοδυναμίας στοιχείων του $\mathbb{Z}$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\equiv (\text{mod } n)$ ονομάζονται **κλάσεις υπολοίπου modulo** n . Αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε

$$[x] = \{y : y \in \mathbb{Z} \text{ με } y - x = kn, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Το σύνολο των κλάσεων υπολοίπου modulo n το συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}_n$ και είναι $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$.

1.2 Η έννοια της αλγεβρικής δομής

Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν διαδικασίες με τις οποίες σε δύο στοιχεία ενός συνόλου ή διαφορετικών συνόλων αντιστοιχίζεται ένα μόνο στοιχείο

του ιδίου ή διαφορετικού συνόλου. Τέτοιες διαδικασίες εν γένει ονομάζονται πράξεις. Σε πολλές περιπτώσεις παίζει ρόλο και η διάταξη με την οποία θεωρούμε τα δύο στοιχεία, π.χ. στην πράξη της αφαίρεσης στους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι, μία πράξη ορίζεται ως μία απεικόνιση ενός συνόλου διατεταγμένων ζευγών σε ένα άλλο σύνολο. Ιδιαίτερο όμως ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι επόμενες περιπτώσεις.

Ορισμός 1.2.1 Έστω το σύνολο $A \neq \emptyset$. Μία απεικόνιση π της μορφής $\pi: A \times A \rightarrow A$, ονομάζεται **εσωτερική πράξη** στο A . Αν $(\alpha, \beta) \in A \times A$, τότε το στοιχείο $\pi((\alpha, \beta))$ ονομάζεται **αποτέλεσμα** της πράξης π μεταξύ των α και β .

Συνήθως, για το συμβολισμό μιας εσωτερικής πράξης χρησιμοποιούμε ένα από τα σύμβολα $\circ, *, \cdot, +$. Στη περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα της πράξης μεταξύ των α και β , αντί $\pi((\alpha, \beta))$ γράφεται ως $\alpha \circ \beta$, $\alpha * \beta$ ή ως $\alpha \cdot \beta$, $\alpha + \beta$.

Ορισμός 1.2.2 Θεωρούμε τα μη κενά σύνολα A και B . Μία απεικόνιση φ της μορφής $\varphi: A \times B \rightarrow B$, ονομάζεται **εξωτερική πράξη στο B με σύνολο τελεστών το A** . Αν $(\lambda, \beta) \in A \times B$, το στοιχείο $\varphi((\lambda, \beta))$ ονομάζεται **αποτέλεσμα** της εξωτερικής πράξης φ μεταξύ των $\lambda \in A$ και $\beta \in B$.

Συνήθως, για το συμβολισμό μιας εξωτερικής πράξης, αντί του φ , χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\cdot$ και, αντί του $\varphi((\lambda, \beta))$, γράφουμε $\lambda \cdot \beta$ ή πιο απλά $\lambda\beta$.

Παράδειγμα 1. Οι γνωστές μας πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης, και πολλαπλασιασμού ακεραίων ή πραγματικών αριθμών, είναι εσωτερικές πράξεις στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ή στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 2. Ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού με διάνυσμα είναι μία εξωτερική πράξη στο σύνολο των διανυσμάτων του χώρου με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3. Οι πράξεις της ένωσης $\cup$ και της τομής $\cap$ συνόλων είναι εσωτερικές πράξεις στο δυναμοσύνολο $P(\Omega)$ του συνόλου Ω .

Στη συνέχεια θα δώσουμε τις πιο βασικές ιδιότητες που ικανοποιούν κατά κανόνα οι διάφορες εσωτερικές πράξεις, γενικεύοντας έτσι τις ιδιότητες που ικανοποιούν οι γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών σε οποιαδήποτε εσωτερική πράξη.

Ορισμός 1.2.3 Έστω το σύνολο $A \neq \emptyset$ και οι εσωτερικές πράξεις $\circ$ και $*$ στο σύνολο A .

(i) Η εσωτερική πράξη $\circ$ στο σύνολο A ονομάζεται **αντιμεταθετική**, αν για κάθε $\alpha, \beta \in A$ ισχύει:

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

(ii) Η εσωτερική πράξη $\circ$ στο σύνολο A ονομάζεται **προσεταιριστική**, αν για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ισχύει:

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

(iii) Η εσωτερική πράξη $\circ$ στο σύνολο A ονομάζεται **επιμεριστική** ως προς την πράξη $*$, αν για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ισχύουν:

$$\alpha \circ (\beta * \gamma) = (\alpha \circ \beta) * (\alpha \circ \gamma) \quad [\text{αριστερά επιμεριστική}]$$

$$(\alpha * \beta) \circ \gamma = (\alpha \circ \gamma) * (\beta \circ \gamma) \quad [\text{δεξιά επιμεριστική}].$$

Παράδειγμα 4. Οι εσωτερικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές. Επιπλέον η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση.

Παράδειγμα 5. Στο δυναμοσύνολο $P(\Omega)$ ενός συνόλου Ω οι πράξεις της τομής και της ένωσης είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές, αφού για κάθε $A, B, \Gamma \in P(\Omega)$ ισχύουν:

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{και} \quad A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$$

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma).$$

Επιπλέον, η τομή $\cap$ είναι πράξη επιμεριστική ως προς την ένωση $\cup$, αλλά και η ένωση $\cup$ είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πράξη $\cap$ της τομής, αφού για κάθε $A, B, \Gamma \in P(\Omega)$ ισχύουν:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \quad \text{και} \quad A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

Ορισμός 1.2.4 Έστω $\circ$ μία εσωτερική πράξη στο σύνολο A . Ένα στοιχείο $e \in A$ ονομάζεται **ουδέτερο στοιχείο** ως προς την πράξη $\circ$, αν για κάθε $\alpha \in A$ ισχύει:

$$\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha.$$

Παράδειγμα 6. Ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη της πρόσθεσης στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ο αριθμός 0, ενώ ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι ο αριθμός 1.

Παράδειγμα 7. Ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη της ένωσης $\cup$ στο δυναμοσύνολο $P(\Omega)$ είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.

Θεώρημα 1.2.1 Έστω $\circ$ μία εσωτερική πράξη στο σύνολο A . Τότε το ουδέτερο στοιχείο του A ως προς την πράξη $\circ$, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω ότι e και e' είναι δύο ουδέτερα στοιχεία του A ως προς την πράξη $\circ$. Τότε ισχύουν

$$e \circ e' = e \quad (\text{αφού } e' \text{ ουδέτερο στοιχείο})$$

$$e \circ e' = e' \quad (\text{αφού } e \text{ ουδέτερο στοιχείο}).$$

Αρα θα είναι και $e = e'$, οπότε το ουδέτερο στοιχείο, αν υπάρχει, είναι μοναδικό. $\square$

Ορισμός 1.2.5 Έστω $\circ$ μία εσωτερική πράξη στο σύνολο A ως προς την οποία υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in A$. Τα στοιχεία α και α' του A ονομάζονται **συμμετρικά** ως προς την πράξη $\circ$, αν ισχύει:

$$\alpha \circ \alpha' = \alpha' \circ \alpha = e.$$

Όταν τα στοιχεία α και α' είναι συμμετρικά ως προς την πράξη $\circ$, τότε λέμε ότι το α' είναι συμμετρικό του α ως προς την πράξη $\circ$, αλλά και ότι το α είναι συμμετρικό του α' ως προς την πράξη $\circ$.

Παράδειγμα 8. Κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει συμμετρικό στοιχείο ως προς την πρόσθεση τον αριθμό $-\alpha \in \mathbb{R}$ (**αντίθετος** του α).

Παράδειγμα 9. Κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ έχει συμμετρικό στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό τον αριθμό $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ (**αντίστροφος** του α).

Παράδειγμα 10. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, τα στοιχεία $\alpha + \beta i$, $-\alpha - \beta i$ είναι συμμετρικά (αντίθετα) ως προς την πράξη της πρόσθεσης, ενώ ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού το στοιχείο $\alpha + \beta i \neq 0 = 0 + 0i$ έχει συμμετρικό (αντίστροφο) το μιγαδικό αριθμό

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i.$$

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, σε ένα σύνολο A είναι δυνατόν να οριστούν διάφορες εσωτερικές ή εξωτερικές πράξεις. Το σύνολο A εφοδιασμένο με μία ή περισσότερες από τις πράξεις αυτές λέμε ότι έχει μία **αλγεβρική**

δομή, η οποία χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες που ικανοποιούν οι πράξεις με τις οποίες είναι εφοδιασμένο. Συμβολικά γράφουμε $(A, \circ, \dots)$. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές από τις βασικές αλγεβρικές δομές, όπως είναι η ομάδα, ο δακτύλιος, το σώμα και στα επόμενα κεφάλαια τους διανυσματικούς χώρους.

1.3 Οι βασικές αλγεβρικές δομές.

Στη παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε αλγεβρικές δομές με μία εσωτερική πράξη (ομάδα) ή με δύο εσωτερικές πράξεις (δακτύλιος και σώμα).

Ορισμός 1.3.1 Ένα σύνολο $G \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη $\circ$ ονομάζεται **ομάδα**, αν ισχύουν:

O1: $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in G$, [**προσεταιριστική ιδιότητα**],

O2: υπάρχει $e \in G$ τέτοιο, ώστε $\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha$, για κάθε $\alpha \in G$, [**ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου**],

O3: για κάθε $\alpha \in G$ υπάρχει $\alpha' \in G$ τέτοιο, ώστε $\alpha \circ \alpha' = \alpha' \circ \alpha = e$, [**ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου**].

Η ομάδα G λέγεται **αβελιανή ή αντιμεταθετική**, αν η πράξη $\circ$ είναι αντιμεταθετική, δηλαδή, αν για κάθε $\alpha, \beta \in G$ ισχύει

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

Συχνά χρησιμοποιούμε για την ομάδα G το συμβολισμό $(G, \circ)$, όπου φαίνεται και η εσωτερική πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένο το σύνολο G .

Αν η πράξη της ομάδας είναι η πρόσθεση (αντ., πολλαπλασιασμός), τότε η ομάδα ονομάζεται **προσθετική** (αντ., **πολλαπλασιαστική**).

Σε μία προσθετική ομάδα το συμμετρικό του στοιχείου α συμβολίζεται με $-\alpha$ και ονομάζεται **αντίθετο** του α , ενώ σε μία πολλαπλασιαστική ομάδα το συμμετρικό στοιχείο του α συμβολίζεται με α^{-1} και ονομάζεται **αντίστροφο** του α .

Η αλγεβρική δομή $(G, \circ)$ ονομάζεται **ημιομάδα**, αν η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική.

Παράδειγμα 1. Η αλγεβρική δομή $(\mathbb{Z}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα, όπως και η αλγεβρική δομή $(\mathbb{R}, +)$.

Παράδειγμα 2. Η αλγεβρική δομή $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα, ενώ η δομή $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ δεν είναι ομάδα, αφού δεν αληθεύει η ιδιότητα **O3** του ορισμού 1.3.1.

Παράδειγμα 3. Το σύνολο των νιοστών ριζών της μονάδας

$$A_\nu = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^\nu = 1 \right\} = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{\nu} + i \sin \frac{2k\pi}{\nu} : k = 0, 1, 2, \dots, \nu-1 \right\}$$

είναι αβελιανή ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών.

Παράδειγμα 4. Το δυναμοσύνολο $P(\Omega)$ ενός συνόλου Ω , εφοδιασμένο με την πράξη $+$ που ορίζεται από

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

και ονομάζεται **συμμετρική διαφορά**, είναι αβελιανή ομάδα.

Θεώρημα 1.3.1 Αν η αλγεβρική δομή $(G, \circ)$ είναι ομάδα, τότε ισχύουν:

- I. Το ουδέτερο στοιχείο e είναι μοναδικό.
- II. Κάθε στοιχείο $\alpha \in G$ έχει μοναδικό συμμετρικό ως προς την πράξη $\circ$.
- III. Κάθε στοιχείο $\alpha \in G$ είναι **απλοποιήσιμο**, δηλαδή για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in G$ ισχύουν:

$$(\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \Rightarrow \beta = \gamma) \text{ και } (\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \Rightarrow \beta = \gamma).$$

- IV. Αν $\alpha, \beta \in G$, τότε κάθε μία από τις εξισώσεις $\alpha \circ x = \beta$ και $x \circ \alpha = \beta$ έχει μοναδική λύση στο G .

Απόδειξη: (I) Είναι το θεώρημα 1.2.1 της προηγούμενης παραγράφου.

(II) Έστω ότι τα στοιχεία $x_1, x_2 \in G$ είναι συμμετρικά του $x \in G$ ως προς την πράξη $\circ$. Τότε θα έχουμε

$$x \circ x_1 = x_1 \circ x = e \text{ και } x \circ x_2 = x_2 \circ x = e,$$

οπότε λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας και του ορισμού του ουδέτερου στοιχείου έπεται ότι

$$x_1 = x_1 \circ e = x_1 \circ (x \circ x_2) = (x_1 \circ x) \circ x_2 = e \circ x_2 = x_2.$$

(III) Αν α' είναι το συμμετρικό του α ως προς την πράξη $\circ$, τότε

$$\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \Rightarrow \alpha' \circ (\alpha \circ \beta) = \alpha' \circ (\alpha \circ \gamma)$$

$$\Rightarrow (\alpha' \circ \alpha) \circ \beta = (\alpha' \circ \alpha) \circ \gamma$$

$$\Rightarrow e \circ \beta = e \circ \gamma$$

$$\Rightarrow \beta = \gamma.$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η συνεπαγωγή: $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \Rightarrow \beta = \gamma$.

(IV) Αν α' είναι το συμμετρικό του α ως προς την πράξη $\circ$, τότε έχουμε

$$\alpha \circ x = \beta \Leftrightarrow \alpha' \circ (\alpha \circ x) = \alpha' \circ \beta \Leftrightarrow (\alpha' \circ \alpha) \circ x = \alpha' \circ \beta$$

$$\Leftrightarrow e \circ x = \alpha' \circ \beta \Leftrightarrow x = \alpha' \circ \beta,$$

δηλαδή το στοιχείο $\alpha' \circ \beta$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\alpha \circ x = \beta$.

Ομοίως αποδεικνύεται, ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x \circ \alpha = \beta$ είναι το στοιχείο $\beta \circ \alpha'$. □

Ορισμός 1.3.2 Η αλγεβρική δομή $(\Delta, +, \cdot)$ ονομάζεται **δακτύλιος**, αν ισχύουν:

Δ1: Η αλγεβρική δομή $(\Delta, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Δ2: Η αλγεβρική δομή $(\Delta, \cdot)$ είναι ημιομάδα

Δ3: Η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική ως προς την πράξη $+$.

Ισοδύναμα, η αλγεβρική δομή $(\Delta, +, \cdot)$ είναι δακτύλιος, αν ισχύουν:

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$.
2. Υπάρχει $0 \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \Delta$.
3. Κάθε $\alpha \in \Delta$ έχει αντίθετο στοιχείο $-\alpha \in \Delta$.
4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$.
6. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ και $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$.

Ο δακτύλιος $(\Delta, +, \cdot)$ ή απλά Δ ονομάζεται **αντιμεταθετικός**, αν για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

Ο δακτύλιος $(\Delta, +, \cdot)$ ονομάζεται **δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο** ή **δακτύλιος με μονάδα**, αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη $\cdot$ το οποίο συνήθως συμβολίζεται με 1 ή 1_Δ . Επομένως, για κάθε $\alpha \in \Delta$, όπου $(\Delta, +, \cdot)$ είναι δακτύλιος με μονάδα το στοιχείο 1 , ισχύει:

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία $\alpha, \beta \in \Delta$, όπου $(\Delta, +, \cdot)$ είναι δακτύλιος, λέγονται **μηδενοδιαίρετες**, αν ικανοποιούν την ισότητα

$$\alpha \cdot \beta = 0.$$

Παράδειγμα 5. Η αλγεβρική δομή $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Ομοίως και αλγεβρική δομή $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Παράδειγμα 6. Το σύνολο $\Delta = \{\alpha + \beta\sqrt{3} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ εφοδιασμένο με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα το $1 + 0\sqrt{3}$.

Παράδειγμα 7. Κάθε μονοστοιχειακό σύνολο $\Delta = \{\alpha\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις

$$\alpha + \alpha = \alpha \text{ (πρόσθεση),}$$

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha \text{ (πολλαπλασιασμός),}$$

γίνεται αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Ο δακτύλιος αυτός ονομάζεται **μηδενικός δακτύλιος**.

Ορισμός 1.3.3 Ένας μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος $(\Delta, +, \cdot)$, με την ιδιότητα

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0,$$

καλείται **ακέραια περιοχή**, δηλαδή η ακέραια περιοχή δεν έχει μηδενο-διαιρέτες.

Θεώρημα 1.3.2 Έστω ο δακτύλιος $(\Delta, +, \cdot)$. Τότε ισχύουν:

- (i) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$, για κάθε $\alpha \in \Delta$.
- (ii) $\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.

Απόδειξη. (i) Αν $\beta \in \Delta$, τότε $\beta + 0 = \beta$, οπότε θα έχουμε και

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + 0) &= \alpha \cdot \beta \Rightarrow \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot \beta \\ \Rightarrow -(\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0) &= -(\alpha \cdot \beta) + \alpha \cdot \beta \\ \Rightarrow (-\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta) + \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \Rightarrow 0 + \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και ότι $0 \cdot \alpha = 0$.

(ii) Για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} (-\beta) + \beta &= 0 \Rightarrow \alpha \cdot [(-\beta) + \beta] = \alpha \cdot 0 \\ \Rightarrow \alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \beta &= \alpha \cdot 0 \text{ [επιμεριστική ιδιότητα]} \\ \Rightarrow \alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \beta &= 0, \quad [\text{λόγω του (i)}] \end{aligned}$$

Επομένως το στοιχείο $\alpha \cdot (-\beta)$ είναι αντίθετο του στοιχείου $\alpha \cdot \beta$, οπότε λόγω της μοναδικότητας του αντίθετου στοιχείου θα είναι $\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta)$. $\square$

Ορισμός 1.3.4 Η αλγεβρική δομή $(\Sigma, +, \cdot)$ ονομάζεται **σώμα**, αν ισχύουν:

- S1: Η αλγεβρική δομή $(\Sigma, +, \cdot)$ είναι μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος.
- S2: Η αλγεβρική δομή $(\Sigma^*, \cdot)$ είναι ομάδα, όπου $\Sigma^* = \Sigma - \{0\}$.

Παράδειγμα 8. Η αλγεβρική δομή $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι το σώμα των **πραγματικών αριθμών**, ενώ η αλγεβρική δομή $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι το σώμα των **μιγαδικών αριθμών**.

Παράδειγμα 9. Το σύνολο $\Delta = \{\alpha + \beta\sqrt{3} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ εφοδιασμένο με τις φυσικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των πραγματι-

κών αριθμών είναι σώμα. Κάθε στοιχείο $\alpha + \beta\sqrt{3} \in \Delta$, διάφορο του μηδενικού στοιχείου $0 + 0\sqrt{3}$, έχει αντίστροφο στοιχείο

$$(\alpha + \beta\sqrt{3})^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 3\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2 - 3\beta^2}\sqrt{3}.$$

Θεώρημα 1.3.3 Έστω $(\Sigma, +, \cdot)$ ένα σώμα. Τότε, αν $\alpha, \beta \in \Sigma$ ισχύουν:

(i) $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

(ii) Η εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ με $\alpha \neq 0$ έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη. (i) Αν είναι $\alpha = 0$, τότε η συνεπαγωγή αληθεύει.

Αν είναι $\alpha \neq 0$, τότε υπάρχει ο αντίστροφός του α^{-1} , οπότε:

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \beta) = \alpha^{-1} \cdot 0$$

$$\Rightarrow (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \beta = 0 \quad [\text{προσεταιριστική ιδιότητα}]$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \beta = 0 \quad [\text{ιδιότητα αντίστροφου στοιχείου}]$$

$$\Rightarrow \beta = 0. \quad [\text{ιδιότητα μοναδιαίου στοιχείου}]$$

(ii) Αφού είναι $\alpha \neq 0$, υπάρχει ο αντίστροφός του α^{-1} και έχουμε:

$$\alpha \cdot x = \beta \Leftrightarrow \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \beta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot \beta \quad [\text{προσεταιριστική ιδιότητα και } \Theta.3.2(i)]$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot x = \alpha^{-1} \cdot \beta \quad [\text{ιδιότητα αντίστροφου στοιχείου}]$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha^{-1} \cdot \beta. \quad [\text{ιδιότητα μοναδιαίου στοιχείου}] \quad \square$$

Σε κάθε πολλαπλασιαστική ομάδα $(G, \cdot)$, αλλά και σε κάθε δακτύλιο $(\Delta, +, \cdot)$ και σε κάθε σώμα $(\Sigma, +, \cdot)$, ορίζουμε δυνάμεις με βάση α και εκθέτη $n \in \mathbb{N}^*$, επαγωγικά ως εξής:

$$\alpha^1 = \alpha \text{ και } \alpha^n = \alpha^{n-1} \cdot \alpha, n \geq 2.$$

Σε κάθε δακτύλιο $(\Delta, +, \cdot)$ με μονάδα, αλλά και σε κάθε σώμα $(\Sigma, +, \cdot)$, για κάθε στοιχείο τους α και για κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε το στοιχείο $n\alpha$ επαγωγικά, ως εξής:

$$1\alpha = \alpha \text{ και } n\alpha = (n-1)\alpha + \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{n-\text{όροι}}, n \geq 2.$$

Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας ο παραπάνω ορισμός του στοιχείου $n\alpha$ ταυτίζεται με την έννοια του στοιχείου $n\alpha$, όταν $\Delta = \mathbb{Z}$ ή $\Sigma = \mathbb{Z}$.