

$\dim K_\lambda(T)$, είναι βάση του $K_\lambda(T)$.

Απόδειξη του α). Έστω ότι η περίοδος γ έχει μήκος p και τελικό διάνυσμα x . Τότε $\gamma = \{v_1, \dots, v_p\}$, όπου $v_i = (T - \lambda I)^{p-i}x$, $i < p$ και $v_p = x$. Είναι:

$$\begin{aligned}(T - \lambda I)v_1 &= (T - \lambda I)^p x = 0 \Rightarrow Tv_1 = \lambda v_1, \\ (T - \lambda I)v_i &= (T - \lambda I)^{p-i+1}x = v_{i-1}, \quad i > 1\end{aligned}\quad (18.4)$$

Από τις σχέσεις (18.4) έχουμε ότι $TU \subseteq U$ και ο πίνακας του περιορισμού T_U είναι Jordan μπλοκ.

Απόδειξη του β). Η παραπάνω διαδικασία α) αν εφαρμοστεί για κάθε περίοδο της β θα δώσει ως πίνακα του T ως προς τη βάση β μια κανονική μορφή Jordan και επομένως η β είναι μια βάση Jordan. $\square$

18.3 Αλγεβρικές δομές

18.3.1 Έννοια σχέσης - Ισοδυναμία

Έστω δύο A, B διάφορα του κενού σύνολα.

α) **Καρτεσιανό γινόμενο** $A \times B$ των συνόλων A, B είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών: $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$

β) **Διμελής σχέση** ή απλώς **σχέση** από το σύνολο A στο σύνολο B είναι κάθε υποσύνολο σ του $A \times B$. Έτσι για κάθε $(x, y) \in A \times B$ είναι $(x, y) \in \sigma$ ή $(x, y) \notin \sigma$. Γράφουμε επίσης και $x \sigma y$ αντί για $(x, y) \in \sigma$.

Όταν έχουμε $A = B$, το σ λέγεται **σχέση στο σύνολο** A . Παράδειγμα η σχέση ανισότητας $x \leq y$ στο $\mathbb{R}$.

Σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A είναι μία σχέση στο A , που θα τη συμβολίζουμε με « $\sim$ » ή « $\equiv$ », η οποία για κάθε $x, y, z \in A$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $x \sim x$ (ανακλαστική ή αυτοπαθής ιδιότητα)
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (συμμετρική ιδιότητα)
- $x \sim y$ και $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (μεταβατική ιδιότητα)

Παραδείγματα σχέσεων ισοδυναμίας: 1. Η ισότητα σ' ένα σύνολο.

2. Η σχέση « $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ » στο σύνολο όλων των κλασμάτων $K(\mathbb{Z}) = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$. 3. Η σχέση παραλληλίας στο σύνολο όλων των ευθειών του χώρου.

Έστω $A \neq \emptyset$ ένα σύνολο με μία σχέση ισοδυναμίας « $\sim$ ». Για κάθε $\alpha \in A$ το σύνολο $[\alpha] = \{x \in A : x \sim \alpha\}$ λέγεται **κλάση ισοδυναμίας** του στοιχείου α και κάθε $x \in [\alpha]$ λέγεται **αντιπρόσωπος** της κλάσης. Ισχύουν:

- $[\alpha] \neq \emptyset$, αφού $\alpha \in [\alpha]$
- $[\alpha] = [\beta] \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$.
- $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset \Leftrightarrow \alpha \not\sim \beta$.
- $\bigcup_{\alpha \in A} [\alpha] = A$.

Από τις ιδιότητες (i)-(iv) προκύπτει ότι το σύνολο A διαμερίζεται σε ένα σύνολο ξένων μεταξύ των υποσυνόλων του, τις κλάσεις ισοδυναμίας. Γι' αυτό λέμε ότι το σύνολο των κλάσεων αποτελεί μία **διαμέριση** του A , συμβολίζεται με $A/\sim$ και λέγεται **σύνολο πηλίκου** του A ως προς την σχέση « $\sim$ ».

Παραδείγματα: 1. Η σχέση παραλληλίας στο σύνολο των ευθειών του χώρου διαμερίζει το σύνολο σε κλάσεις ισοδυναμίας κάθε μία από τις οποίες ορίζει και μία διεύθυνση.

2. Στο σύνολο $\mathcal{E}_\delta$ όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου η σχέση: « $AB \sim \Gamma\Delta \Leftrightarrow AB, \Gamma\Delta$ ομόρροπα και $\|AB\| = \|\Gamma\Delta\|$ », είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{E}_\delta$. Κάθε κλάση που ορίζει λέγεται **ελεύθερο διάνυσμα**.

3. Στο σύνολο των κλασμάτων $K(\mathbb{Z})$ κάθε κλάση ισοδυναμίας, που προκύπτει από την σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε σ' αυτό, λέγεται **ρητός αριθμός**.

18.3.2 Πράξεις

Εσωτερική και Εξωτερική πράξη

Έστω A, K δύο διάφορα του κενού σύνολα.

α) **Εσωτερική πράξη** στο A είναι κάθε απεικόνιση $\pi : A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \rightarrow \pi(a, b)$. Το στοιχείο $\pi(a, b)$ λέγεται **αποτέλεσμα** ή **εξαγόμενο** της πράξης μεταξύ των a, b . Π.χ η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Z}$ ή $\mathbb{R}$. Επίσης η τομή και η ένωση στο σύνολο όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου $\Omega \neq \emptyset$.

0). Η εσωτερική πράξη συμβολίζεται συνήθως με $*$, $\circ$, $\oplus$, $+$ κ.λ.π. γράφουμε π.χ. $a * b$ αντί $\pi(a, b)$ και $(A, *)$ για να δηλώσουμε ότι το σύνολο A είναι εφοδιασμένο με την πράξη « $*$ ».

β) Εξωτερική πράξη στο A με σύνολο τελεστών το K είναι κάθε απεικόνιση $\varphi: K \times A \rightarrow A$, $(\lambda, a) \rightarrow \varphi(\lambda, a)$. Π.χ. Ο πολλαπλασιασμός διανυσμάτων επί αριθμό είναι εξωτερική πράξη στο σύνολο D των διανυσμάτων με σύνολο τελεστών το $\mathbb{R}$. Η εξωτερική πράξη συμβολίζεται συνήθως με « $\cdot$ » (επί), αλλιώς γράφουμε $\lambda \cdot a$ ή απλά λa αντί $\varphi(\lambda, a)$.

Ιδιότητες των πράξεων

Έστω το σύνολο $(A, *)$ με την εσωτερική πράξη $*$. Η πράξη $*$ λέγεται:

- (i) **αντιμεταθετική** αν ισχύει: $a * b = b * a$ για κάθε $a, b \in A$.
- (ii) **προσεταιριστική** αν ισχύει: $a * (b * c) = (a * b) * c$ για κάθε $a, b, c \in A$.

Ένα στοιχείο $e \in A$ λέγεται **ουδέτερο** στοιχείο ως προς την πράξη $*$ αν ισχύει $e * a = a * e = a$ για κάθε $a \in A$.

Οι πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός στο π.χ. $\mathbb{R}$ είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές και έχουν ουδέτερα στοιχεία τα 0 και 1 αντίστοιχα. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων στο Π_n είναι πράξη προσεταιριστική, αλλά όχι αντιμεταθετική και έχει ουδέτερο στοιχείο τον μοναδιαίο πίνακα I .

Το ουδέτερο στοιχείο όταν υπάρχει είναι μοναδικό.

Αν η πράξη $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο, έστω $e \in A$, τα στοιχεία $a, a' \in A$ θα λέγονται **συμμετρικά** ως προς την πράξη $*$, αν ισχύει: $a * a' = a' * a = e$.

Αν η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική και υπάρχει ουδέτερο στοιχείο τότε το συμμετρικό a' του a είναι μοναδικό.

Όταν η πράξη είναι η «πρόσθεση» το συμμετρικό στοιχείο λέγεται και **αντίθετο** ενώ όταν είναι ο «πολλαπλασιασμός» λέγεται και «**αντίστροφος**».

Έστω το σύνολο $(A, *, \circ)$ με τις δύο εσωτερικές πράξεις $*$, $\circ$. Η πράξη $\circ$ λέγεται **επιμεριστική** ως προς την πράξη $*$ αν ισχύουν:

$$\underbrace{a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)}_{\text{επιμεριστική από αριστερά}} \quad \text{και} \quad \underbrace{(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)}_{\text{επιμεριστική από δεξιά}}$$

Μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $(A, *)$ λέγεται **συμβιβαστή** με την εσωτερική πράξη $*$ αν ισχύει: $a \sim b, c \sim d \Rightarrow (a * c) \sim (b * d)$. Τότε στο σύνολο πηλίκο $A / \sim$ των κλάσεων ισοδυναμίας ορίζεται η εσωτερική πράξη: $[a] * [b] = [a * b]$ (συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο $*$).

Ένα υποσύνολο E του $(A, *)$ θα λέγεται **κλειστό** ως προς την πράξη $*$ αν για κάθε $a, b \in E \Rightarrow a * b \in E$.

18.3.3 Δομές

Ένα σύνολο $A (\neq \emptyset)$ εφοδιασμένο με μία ή περισσότερες πράξεις (εσωτερικές ή εξωτερικές) λέγεται «**αλγεβρική δομή**», χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες που ικανοποιούν οι πράξεις αυτές και συμβολίζεται συνήθως με $(A, *, \circ, +, \dots)$.

Δομές με μία πράξη $(G, *)$

Η αλγεβρική δομή $(G, *)$ ονομάζεται:

- α) **ημιομάδα** αν η πράξη « $*$ » είναι προσεταιριστική.
- β) **ομάδα** αν η πράξη $*$ είναι:
 - i) προσεταιριστική, δηλαδή η $(G, *)$ είναι ημιομάδα
 - ii) έχει ουδέτερο στοιχείο
 - iii) κάθε στοιχείο του G έχει συμμετρικό.

Αν επί πλέον η « $*$ » είναι και αντιμεταθετική η $(G, *)$ λέγεται **αντιμεταθετική** ή **Αβελιανή ομάδα**.

Παραδείγματα-συνέπειες: Η δομή $(\mathbb{N}^*, +)$ είναι ημιομάδα, οι $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\Pi_{\mu \times \nu}, +)$ είναι αντιμεταθετικές ομάδες.

Σε μία ομάδα $(G, *)$ ισχύουν:

- iv) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ και $b * a = c * a \Rightarrow b = c$ (ιδιότητα διαγραφής)
- v) Η εξισώσεις $a * x = b$ και $y * a = b$, $a, b \in G$ έχουν μοναδικές λύσεις στο G .

Δομές με δύο πράξεις: $(\Delta, +, \cdot)$ και $(K, +, \cdot)$

• **Δακτύλιος.** Η δομή $(\Delta, +, \cdot)$ λέγεται **δακτύλιος** αν

- i) η δομή $(\Delta, +)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα.
- ii) η δομή $(\Delta, \cdot)$ είναι ημιομάδα
- iii) η πράξη « $\cdot$ » είναι επιμεριστική ως προς την πράξη « $+$ »

Ο δακτύλιος $(\Delta, +, \cdot)$ λέγεται:

1. αντιμεταθετικός αν η πράξη « $\cdot$ » είναι αντιμεταθετική.
2. δακτύλιος με μονάδα αν η πράξη « $\cdot$ » έχει ουδέτερο στοιχείο.
3. ακεραία περιοχή αν είναι «μη μηδενικός» αντιμεταθετικός δακτύλιος

και δεν έχει «μηδενοδιαίρετες», δηλαδή να ισχύει $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ή $b = 0$.

Μηδενικός δακτύλιος λέγεται το μονοσύνολο $\Delta = \{a\}$ με πράξεις: $a + a = a$ και $a \cdot a = a$ (οπότε είναι $0 = 1 = a$).

Παραδείγματα-συνέπειες Οι δομές $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικοί δακτύλιοι και ακεραίες περιοχές. Η δομή $(\Pi_{\mu \times \nu}, +, \cdot)$ είναι δακτύλιος με μονάδα, αλλά δεν είναι αντιμεταθετικός, ούτε ακεραία περιοχή.

Σ' ένα δακτύλιο $(\Delta, +, \cdot)$ ισχύουν ακόμη:

- iv) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
- v) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$.
- vi) $(-a)(-b) = ab$.

(Το $-a$ είναι το συμμετρικό του a ως προς την « $+$ »).

• **Σώμα.** Η δομή $(K, +, \cdot)$ λέγεται σώμα αν

- i) η δομή $(K, +, \cdot)$ είναι μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος.
- ii) η δομή $(K^*, \cdot)$ είναι ομάδα ($K^* = K \setminus \{0\}$),

ισοδύναμα η $(K, +, \cdot)$ είναι σώμα αν είναι μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, όπου κάθε $a \in K^*$ έχει αντίστροφο.

Οι δομές $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι σώματα.

Βασική ιδιότητα σώματος

Σ' ένα σώμα K ισχύει: Αν $a, b \in K$ και $a \cdot b = 0$ τότε $a = 0$ ή $b = 0$.

Χαρακτηριστική δακτυλίου ή σώματος λέγεται ο μικρότερος θετικός ακέραιος n , αν υπάρχει, τέτοιος ώστε $n \cdot 1 = 0$ ($n \cdot 1 = 1 + 1 + \dots + 1$ n -φορές). Αν δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος λέμε ότι ο δακτύλιος ή το σώμα έχει χαρακτηριστική μηδέν. Η χαρακτηριστική των $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι μηδέν