

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός α τέτοιος ώστε $\alpha^2 = 3$.

Ασκηση 2. (α) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{6}$ είναι άρρητος.

(β) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Ασκηση 3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει η ταυτότητα

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}.$$

Ασκηση 4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν οι ανισότητες

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

και

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Ασκηση 5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{n+1}{2}.$$

Ασκηση 6. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι ίσο με 2^n .

Ασκηση 7. Ένας φυσικός αριθμός $p > 1$ λέγεται *πρώτος* αν οι μόνοι φυσικοί αριθμοί που διαιρούν τον p είναι ο 1 και ο p . Αποδείξτε με επαγωγή ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων, δηλαδή υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και (όχι απαραίτητα διακεκριμένοι) πρώτοι $p_1, \dots, p_k$ τέτοιοι ώστε $n = p_1 p_2 \cdots p_k$.