

ΔΠΜΣ «MINA», ΕΜΠ

Κβαντική θεωρία της ύλης: Πρώτη ομάδα προβλημάτων

Πρόβλημα Α.1 Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με

$$V(x) = 0, \text{ αν } x \in [0, a], \quad V(x) = +\infty, \text{ αν } x \notin [0, a].$$

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x, 0) = N \sin \frac{\pi x}{a} \left[1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right],$$

όπου το N είναι θετική πραγματική σταθερά. (α) Αν την στιγμή $t = 0$ γίνει μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου, ποιές είναι οι δυνατές τιμές της μέτρησης και οι αντίστοιχες πιθανότητες; (β) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t > 0$. (γ) Βρείτε την μέση τιμή της θέσης ως συνάρτηση του χρόνου. (δ) Έστω ότι έχουμε πολλά τέτοια σωματίδια (N_σ τον αριθμό) μέσα στο παραπάνω πηγάδι δυναμικού. Αν τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και γίνει την χρονική στιγμή $t > 0$ μέτρηση της ενέργειας για ολόκληρο το σύστημα, ποιά θα είναι το αποτέλεσμα; (ε) Τι θα απαντούσατε αν κάποιος σας έδινε ως αρχική κυματοσυνάρτηση την

$$\psi(x, 0) = N \cos \frac{\pi x}{a} \left[1 + \sin \frac{\pi x}{a} \right]$$

και σας έθετε τα ίδια ερωτήματα;

Πρόβλημα Α.2 (α) Δείξτε ότι ο τελεστής $U_T(a) = e^{iap/\hbar}$ (p είναι ο τελεστής της ορμής σε μία διάσταση x) είναι ο κβαντομηχανικός τελεστής χωρικής μετατόπισης κατά a , δηλαδή ότι ισχύει $U_T(a)\psi(x) = \psi(x + a)$ για τυχούσα κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$. (β) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του $U_T(a)$; (γ) Καλούμε μοναδιαίο έναν τελεστή A αν ο ερμιτιανός συζυγής του A (δηλαδή ο $A^\dagger$) είναι ίσος με τον αντίστροφο A^{-1} του A . Δείξτε ότι ο $U_T(a)$ είναι μοναδιαίος τελεστής. Ισχύει το ίδιο για τον τελεστή χρονικής εξέλιξης που έχουμε βρει.

Πρόβλημα Α.3 Έστω L_x, L_y, L_z οι συνιστώσες του διανυσματικού τελεστή της στροφορμής $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. (α) Βρείτε τους μεταθέτες $[L_x, L_y], [L_y, L_z], [L_z, L_x]$. (β) Δείξτε ότι ο τελεστής $\vec{L}^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ μετατίθεται με όλες τις συνιστώσες L_x, L_y, L_z . Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = 0$, $[p_i, p_j] = 0$, για τις συνιστώσες των τελεστών της θέσης και της ορμής.

Πρόβλημα Α.4 Αν οι Ω και Λ είναι ερμιτιανοί τελεστές, τι μπορεί να ειπωθεί για την πιθανή ερμιτιανότητα των τελεστών: (α) $\Omega\Lambda$, (β) $\Omega\Lambda + \Lambda\Omega$, (γ) $[\Omega, \Lambda]$ και (δ) $i[\Omega, \Lambda]$;

Πρόβλημα Α.5 Δείξτε ότι η μέση τιμή της ορμής για κάθε κυματοσυνάρτηση της μορφής $\psi(x) = \psi(x)e^{ikx}$, όπου $\psi(x)$ είναι μια πραγματική και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη κυματοσυνάρτηση και k ένας πραγματικός αριθμός, ισούται πάντα, δηλαδή για κάθε $\psi(x)$, με $\hbar k$.

Πρόβλημα Α.6 Έστω ότι A είναι ένας τελεστής που αντιστοιχεί σε κάποιο φυσικό μέγεθος. Έστω ακόμη ότι $f(x)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση (συνεχής και διαφορίσιμη) σε όλο τον άξονα των x . Εάν η $f(x)$ είναι πραγματική συνάρτηση, δείξτε ότι ο τελεστής $f(A)$ είναι ερμιτιανός.

Πρόβλημα Α.7 (α) Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοενέργειες για το δισδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με $V(x, y) = 0$ αν $x \in [0, L]$ και $y \in [0, L]$, ενώ $V(x, y) = +\infty$ για κάθε άλλο x και y . (β) Υπάρχει εκφυλισμός των ιδιοενεργειών; Δώστε την πολλαπλότητα του εκφυλισμού για την βασική κατάσταση και για τις τρεις πρώτες διεγερμένες ενεργειακές στάθμες.

Πρόβλημα A.8 Δύο φυσικά μεγέθη Ω και Λ αναπαρίστανται, σε κάποια βάση, από τους πίνακες:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(α) Βρείτε τον μεταθέτη $[\Omega, \Lambda]$. (β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να δώσει μία μέτρηση του Ω ; (γ) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να δώσει μία μέτρηση του Λ ; (δ) Γίνεται μία μέτρηση του Ω και αμέσως μετά γίνεται μέτρηση του Λ . Ποιες είναι οι πιθανές τιμές της δεύτερης μέτρησης και ποιες οι αντίστοιχες πιθανότητες; Εξετάστε όλα τα ενδεχόμενα.

Πρόβλημα A.9 Ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα του Dirac. (α) Δείξτε ότι $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, όπου x_i είναι τα σημεία μηδενισμού της $f(x)$, δηλαδή Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση παντού και ότι: $f'(x_i) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \neq 0$. Μπορείτε να δείξετε την σχέση πρώτα για την ειδική περίπτωση που η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο δύο λύσεις και μετά να γενικεύσετε. (β) Η βηματική συνάρτηση $\Theta(x)$ ορίζεται ως $\Theta(x) = 0$, αν $x < 0$ και $\Theta(x) = 1$, αν $x \geq 0$. Δείξτε ότι ισχύει $\Theta(x) \int_{-\infty}^x \delta(x') dx'$, ή, ισοδύναμα, ότι η παράγωγος της $\Theta(x)$ είναι η συνάρτηση δέλτα $\delta(x)$.

Πρόβλημα A.10 Στο πρόβλημα αυτό μας απασχολεί κίνηση μόνο στο επίπεδο xy . Σε αυτήν την περίπτωση, η στροφορμή ορίζεται από την σχέση $p_\theta \equiv xp_y - yp_x$. (α) Βρείτε την έκφραση του τελεστή p_θ στο σύστημα πολικών συντεταγμένων (r, θ) . (β) Αν $\hat{\theta}$ είναι ο τελεστής της γωνίας, βρείτε τον μεταθέτη $[\hat{\theta}, p_\theta]$ στον χώρο των γωνιών, δηλαδή για κυματοσυναρτήσεις της μορφής $\psi(\theta)$. (γ) Βρείτε τις κατάλληλα κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις $\psi_m(\theta)$ και τις ιδιοτιμές του p_θ . (δ) Δείξτε ότι ο τελεστής $e^{i\delta\theta p_\theta}$ είναι ο τελεστής γωνιακής μετατόπισης (δηλαδή περιστροφής) κατά $\delta\theta$ γύρω από τον άξονα των z .

Πρόβλημα A.11 Δίνεται ο ερμιτιανός τελεστής $\hat{\sigma}$ για τον οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει: $\hat{\sigma}^2 = I$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Έστω ακόμη ότι ο τελεστής $\hat{\sigma}$ έχει μόνο δύο ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις, τις $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$. (α) Δείξτε ότι ο τελεστής $\hat{\sigma}$ έχει ιδιοτιμές $+1$ και -1 . Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι συγκεκριμένα είναι $\hat{\sigma}\psi_1(x) = +\psi_1(x)$ και $\hat{\sigma}\psi_2(x) = -\psi_2(x)$ (β) Έστω ότι για ένα σωματίδιο ο τελεστής της Χαμιλτονιανής έχει την μορφή $H = -\lambda\hat{\sigma}$, όπου λ πραγματική σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. Βρείτε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης του σωματιδίου συναρτήσει των τελεστών $\hat{\sigma}$, I και της παραμέτρου $\omega \equiv \frac{\lambda}{\hbar}$. Υπόδειξη: Για να βρείτε το αποτέλεσμα σε «κλειστή» μορφή, θα χρειαστεί να ανατρέξετε στους τύπους αναπτύγματος Taylor δύο γνωστών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. (γ) Έστω ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στην κατάσταση $\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$. Βρείτε την χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους (επιβεβαιώνοντας ότι οι δύο αυτοί τρόποι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα). (δ) Ορίζουμε τον τελεστή $\hat{P}$ ως αυτόν που εναλλάσσει τις $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$, δηλαδή είναι: $\hat{P}\psi_1(x) = \psi_2(x)$ και $\hat{P}\psi_2(x) = \psi_1(x)$. Ο τελεστής $\hat{P}$ υποτίθεται ότι είναι γραμμικός (και ερμιτιανός). Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{P}$; Μετατίθεται ο $\hat{P}$ με τον τελεστή $\hat{\sigma}^2 = I$; (ε) Έστω ότι την στιγμή t γίνεται μέτρηση του μεγέθους $\hat{P}$, ενώ το σύστημα είναι στην χρονικά εξελιγμένη κατάσταση $\psi(x, t)$ που έχουμε βρει στο ερώτημα (γ). Ποιές είναι οι δυνατές τιμές της μέτρησης και ποιές οι αντίστοιχες πιθανότητες; Αν, αντί για το μέγεθος $\hat{P}$, μετρήσουμε το μέγεθος $\hat{\sigma}$ (ή την ενέργεια για την παραπάνω Χαμιλτονιανή), πως αλλάζουν οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα σχετικά με τις δυνατές τιμές της μέτρησης και τις αντίστοιχες πιθανότητες;

Πρόβλημα A.12 Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου έχει σε μια ορισμένη στιγμή τη μορφή

$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1 + \psi_2]$, όπου οι ψ_1 και ψ_2 είναι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας με ιδιοτιμές E_1 και E_2 αντίστοιχα. (α) Υπολογίστε τη μέση ενέργεια και την αβεβαιότητα της ενέργειας στην κατάσταση Ψ . (β) Υποθέτοντας ότι η ψ_1 (ψ_2) είναι μια άρτια (περιττή) πραγματική συνάρτηση, υπολογίστε τη μέση θέση του σωματιδίου ύστερα από χρόνο t .

Πρόβλημα A.13 (α) Θεωρούμε τις $|a\rangle$ και $|b\rangle$, που είναι δύο κανονικοποιημένες καταστάσεις στον ίδιο διανυσματικό χώρο του Hilbert. Αν $X \equiv |b\rangle\langle a|$, βρείτε τους τελεστές $X^\dagger$, $X^\dagger X$ και $XX^\dagger$. (β) Θεωρούμε τις $|a_i\rangle$ και $|b_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$, που είναι δύο πλήρεις και ορθοκανονικές βάσεις του ίδιου χώρου του Hilbert. (με διάσταση n). Δείξτε ότι υπάρχει τελεστής U τέτοιος ώστε να ισχύει: $|b_i\rangle = U|a_i\rangle$, $\forall i$. Δείξτε επιπλέον ότι αυτός ο τελεστής U είναι μοναδιαίος (unitary).

Πρόβλημα A.14 Σωματίδιο μάζας m κινείται στον άξονα των x και σε δυναμικό $V(x) = -g\delta(x)$, όπου $g > 0$ πραγματική σταθερά με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις. (α) Δείξτε ότι η πρώτη παράγωγος της κυματοσυνάρτησης $\psi(x)$, που ικανοποιεί την σχετική εξίσωση του Schrödinger εμφανίζει ασυνέχεια $-g\psi(0)$ στο σημείο $x = 0$. (β) Βρείτε τις ιδιοενέργειες και τις ιδιοσυναρτήσεις για τις δέσμιες καταστάσεις (αν υπάρχουν). (γ) Ποιά είναι η πιθανότητα να ανακλαστεί το σωματίδιο από το δυναμικό, αν κινείται αρχικά από τα αριστερά προς τα δεξιά με ενέργεια $E > 0$; Σημείωση: οι συντελεστές ανάκλασης R και διέλευσης T ορίζονται, με βάση τα αντίστοιχα ρεύματα πυκνότητας πιθανότητας, ως $R \equiv \frac{|j_{\alpha\nu}|}{|j_{\pi\rho}|}$, $T \equiv \frac{|j_{\delta i \epsilon \rho \chi}|}{|j_{\pi\rho}|}$.