

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι, 27 /8/2025
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. (α) (1 μον.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $M \in \mathbb{R}$. Αν κάθε $M' > M$ είναι άνω φράγμα του A είναι τότε και ο M άνω φράγμα του A ? Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(β) (1 μον.) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a \leq b$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

(γ) (1 μον.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και έστω $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A . Αν υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A με $a_n \rightarrow M$ δείξτε ότι το M είναι το supremum του A .

Λύση. (α) Ισχυριζόμαστε ότι ο M είναι άνω φράγμα του A . Πράγματι, αν ο M δεν ήταν άνω φράγμα του A τότε θα υπήρχε $a \in A$ με $M < a$. Θέτουμε $M' = \frac{M+a}{2}$ και παρατηρούμε ότι $M < M' < a$. Οπότε, ο M' είναι γνήσια μεγαλύτερος του M αλλά δεν είναι άνω φράγμα του A αφού υπάρχει στοιχείο του A που είναι γνήσια μεγαλύτερό του. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας.

(β) Από την υπόθεση έπεται ότι κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του A , οπότε

$$\sup A \leq b, \text{ για οποιοδήποτε } b \in B,$$

αφού το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A . Άρα το $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B και συνεπώς

$$\sup A \leq \inf B$$

αφού το $\inf B$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του B .

(γ) Επειδή $a_n \in A$ έπεται ότι $a_n \leq \sup A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $M = \lim_n a_n \leq \sup A$. Όμως $\sup A \leq M$ αφού το M είναι άνω φράγμα και το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A . Άρα $\sup A = M$.

Άσκηση 2. (α) (1 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Διατυπώστε (i) τον ορισμό της σύγκλισης της (a_n) στο a και (ii) την άρνησή του.

(β) Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών :

(i) (1 μον.) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, όπου $0 \leq a \leq b \leq c$.

(ii) (1 μον.) $b_n = \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{2n^2}$.

Λύση. (α) (i) Η (a_n) συγκλίνει στο a αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει ότι $|a_n - a| < \epsilon$.

(ii) Η (a_n) δεν συγκλίνει στο a αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq n_0$ τέτοιο ώστε $|a_n - a| \geq \epsilon$.

(β) (i) Επειδή $0 \leq a \leq b \leq c$, έχουμε ότι

$$c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt{c^n + c^n + c^n} \leq \sqrt[3]{3} c$$

Επειδή $\sqrt[3]{3} \rightarrow 1$, από το θεώρημα Ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \rightarrow c$.

(ii) Έχουμε $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ και άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2} = e$ ως όριο υπακολουθίας. Οπότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2} \right]^{\frac{2}{3}} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2} \right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

Άσκηση 3. (α) Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις:

(i) (1 μον.) Κάθε $1-1$ και συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) < f(1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) (1 μον.) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ έχει σταθερό σημείο.

(β) (1 μον.) Έστω $a \neq b$ και έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a$ αν x ρητός και $f(x) = b$ αν x άρρητος. Δείξτε ότι η f είναι παντού ασυνεχής.

Λύση. (α) (i) Σωστό, διότι από γνωστό θεώρημα κάθε συνεχής συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ που είναι $1-1$ είναι γνησίως μονότονη. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Αφού $f(0) < f(1)$ αναγκαστικά η f είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) Λάθος, π.χ. αν $f(x) = x^2$ τότε $f(0, 1) = (0, 1)$ αλλά $f(x) < x$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

(β) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Από την πυκνότητα ρητών και αρρήτων στο $\mathbb{R}$ υπάρχουν ακολουθίες (q_n) με $q_n \in \mathbb{Q}$ και (a_n) με a_n άρρητο, $\forall n \in \mathbb{N}$ με

$$\lim_n q_n = \lim_n a_n = x_0$$

Από Αρχή Μεταφοράς θα έπρεπε

$$\lim_n f(q_n) = \lim_n f(a_n) = f(x_0)$$

Αλλά $f(q_n) = a$ οπότε και $\lim_n f(q_n) = a$ και ομοίως $f(a_n) = b$ οπότε $\lim_n f(a_n) = b$. Άρα $a = b$, άτοπο.

Άσκηση 4. (α) (1 μον.) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx \neq 0$.

(β) (2 μον.) Έστω $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^{\xi} f(t) dt.$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $H(x) = F(x)G(x)$ όπου $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_x^b g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$)

Λύση. (α) Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού έχουμε

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$$

για κάποιο $\xi \in (a, b)$. Άρα

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = f(\xi) \Rightarrow \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \neq 0$$

(β) Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_x^b g(t) dt$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Για την G παρατηρούμε ότι

$$G(x) = \int_x^b g(t) dt = \int_a^b g(t) dt - \int_a^x g(t) dt$$

Θέτοντας $G_1(x) = \int_a^x g(t) dt$ έχουμε $G_1'(x) = g(x)$ και άρα

$$G'(x) = \left(\int_a^b g(t) dt - G_1(x) \right)' = \left(\int_a^b g(t) dt \right)' - \left(\int_a^x g(t) dt \right)' = -g(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα

$$H'(x) = (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x) \int_x^b g(t) dt - g(x) \int_a^x f(t) dt$$

Επειδή $H(a) = H(b) = 0$ από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \int_\xi^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^\xi f(t) dt$.