

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι
27 /8/2025

Άσκηση 1. (α) (1 μον.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $M \in \mathbb{R}$. Αν κάθε $M' > M$ είναι άνω φράγμα του A είναι τότε και ο M άνω φράγμα του A ? Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(β) (1 μον.) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a \leq b$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

(γ) (1 μον.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο και έστω $M \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A . Αν υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A με $a_n \rightarrow M$ δείξτε ότι το M είναι το supremum του A .

Άσκηση 2. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Διατυπώστε (i) (0.5 μον.) τον ορισμό της σύγκλισης της (a_n) στο a και (ii) (0.5 μον.) την άρνησή του.

(β) Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών :

(i) (1 μον.) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, όπου $0 \leq a \leq b \leq c$.

(ii) (1 μον.) $b_n = \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{2n^2}$.

Άσκηση 3. (α) Εξετάστε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις:

(i) (1 μον.) Κάθε $1-1$ και συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) < f(1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) (1 μον.) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ έχει σταθερό σημείο.

(β) (1 μον.) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq b$ και έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = a$ αν x ρητός και $f(x) = b$ αν x άρρητος. Δείξτε ότι η f είναι παντού ασυνεχής.

Άσκηση 4. (α) (1 μον.) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x) dx \neq 0$.

(β) (2 μον.) Έστω $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^{\xi} f(t) dt.$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $H(x) = F(x)G(x)$ όπου $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ και $G(x) = \int_x^b g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$)