Μεταπτυχιακή Άλγεβρα - Ασκήσεις (Εαρινό 2024-2025)

1. Έστω $(M,+)$ αβελιανή ομάδα. Εφοδιάζουμε το σύνολο των ενδομορφισμών της
$$\mathrm{End}(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ ομομορφισμός ομάδων}\}$$
με μία διμελή πράξη
$$\oplus : \mathrm{End}(M) \times \mathrm{End}(M) \to \mathrm{End}(M) : (f,g) \mapsto f \oplus g$$
όπου $(f \oplus g)(m) := f(m)+g(m) \ \ \forall m \in M$. Η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη με ουδέτερο στοιχείο την μηδενική απεικόνιση
$$e : M \to M : m \mapsto 0_M \quad \forall m \in M.$$
Να δείξετε ότι το $(\mathrm{End}(M), \oplus)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα (δηλαδή ότι η $\oplus$ είναι προσεταιριστική, μεταθετική και ότι υπάρχουν αντίστροφα).

2. Εφοδιάζουμε το $\mathrm{End}(M)$ με μία ακόμα διμελή πράξη
$$\circ : \mathrm{End}(M) \times \mathrm{End}(M) \to \mathrm{End}(M) : (f,g) \mapsto f \circ g$$
όπου $(f \circ g)(m) := f(g(m)) \ \ \forall m \in m$. Να δείξετε ότι η πράξη είναι καλά ορισμένη και το $(\mathrm{End}(M), \circ)$ είναι μονοειδές (δηλαδή η $\circ$ είναι προσεταιριστική και έχει ουδέτερο στοιχείο).

3. Επιπλέον έχουμε δείξει ότι $f \circ (g \oplus h) = f \circ g \oplus f \circ h$ για κάθε $f, g, h \in \mathrm{End}(M)$. Να δείξετε ότι
$$(f \oplus g) \circ h = f \circ h \oplus g \circ h$$
οπότε και ο $(\mathrm{End}(M), \oplus, \circ)$ είναι δακτύλιος.

4. Έστω R δακτύλιος. Υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τρόποι να ορίσουμε πρότυπα υπέρ του R.
   (α) Ένα R-πρότυπο είναι μία αβελιανή ομάδα $(M,+)$ εφοδιασμένη με έναν ομομορφισμό δακτυλίων $R \to \mathrm{End}(M)$.
   (β) Ένα R-πρότυπο είναι μία αβελιανή ομάδα $(M,+)$ εφοδιασμένη με έναν εξωτερικό πολλαπλασιασμό
   $$\times : R \times M \to M : (r,m) \mapsto r \times m$$
   έτσι ώστε
      (i) $r \times (m+m') = r \times m + r \times m'$ για κάθε $r \in R, m, m' \in M$,
      (ii) $(r+r') \times m = r \times m + r' \times m$ για κάθε $r, r' \in R, m \in M$,
      (iii) $(r \cdot r') \times m = r \times (r' \times m)$ για κάθε $r, r' \in R, m \in M$ και
      (iv) $1_R \times m = m$ για κάθε $m \in M$.

   Να δείξετε τα (iii), (iv) στην κατεύθυνση (α) $\Longrightarrow$ (β). Επιπλέον, να δείξετε ότι (β) $\Longrightarrow$ (α).

5. Έστω $(M,+)$ αβελιανή ομάδα. Ορίζουμε απεικόνιση
$$\mathrm{End}(M) \times M \to M : (f,m) \mapsto f(m)$$
για κάθε $f \in \mathrm{End}(M)$ και $m \in M$. Να δείξετε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει $\mathrm{End}(M)$-δράση επί του M, δηλαδή ότι η M αποκτά τη δομή $\mathrm{End}(M)$-προτύπου.

6. Έστω R ένας δακτύλιος, M ένα R-πρότυπο και $N \leqslant M$ ένα R-υποπρότυπο του M. Να δείξετε ότι η καλά ορισμένη απεικόνιση
$$R \times M/N \to M/N : (r, m+N) \mapsto (rm)+N,$$
ορίζει δομή R-προτύπου στο M/N.

7. Εάν R δακτύλιος, M, N, K τρία R-πρότυπα και $f : M \to N$, $g : N \to K$ είναι R-ομομορφισμοί, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f : M \to K$ είναι R-ομομορφισμός.

8. Έστω R δακτύλιος και M, N δύο R-πρότυπα. Να δείξετε ότι ένας R-ομομορφισμός είναι 1-1 αν και μόνο αν $\ker f = \{0\}$.

9. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε την καθολική ιδιότητα του ευθέως γινομένου προτύπων. (Αντιστρέψτε τα βέλη στην καθολική ιδιότητα του ευθέως αθροίσματος προτύπων).

10. Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση

$$\prod_{i\in I}\hom_R(A_i, B) \to \hom_R\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\right) : (A_i \xrightarrow{f_i} B)_{i\in I} \mapsto \tilde{f} : \bigoplus_{i\in I} A_i \to B$$

όπου $\tilde{f}\left(\sum_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} f_i(a_i)$ για κάθε $\sum_{i\in I} a_i \in \bigoplus_{i\in I} A_i$ είναι ισομορφισμός ομάδων με αντίστροφη την απεικόνιση

$$\hom_R\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\right) \to \prod_{i\in I}\hom_R(A_i, B) : \left(\bigoplus_{i\in I} A_i \xrightarrow{g} B\right) \mapsto \left(A_i \xhookrightarrow{\nu_i} \bigoplus_{i\in I} A_i \xrightarrow{g} B\right)_{i\in I}.$$

11. Έστω $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία. Να δείξετε ότι εάν υπάρχει ισομορφισμός $B \cong A \oplus C$ τέτοιος ώστε

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, equal] \arrow[r, hook] & A \oplus C \arrow[u, "f", "\cong"'] \arrow[r, two heads] & C \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

τότε ο i διασπάται.

12. Έστω ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς οριζόντιες γραμμές

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "h"'] & D \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "u"'] & E \arrow[d, "k"] \\ A' \arrow[r, "\kappa'"'] & B' \arrow[r, "\lambda'"'] & C' \arrow[r, "\mu'"'] & D' \arrow[r, "\nu'"'] & E' \end{tikzcd}$$

Να δείξετε ότι αν οι u, g είναι επί και η κ είναι 1-1 τότε η h είναι επί.

13. Έστω M ένα ελεύθερο R-πρότυπο και $\{e_i\}_{i\in I}$ μια βάση αυτού. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$M \to \bigoplus_{i\in I} R : m = \sum_{i\in I} r_i e_i \mapsto (r_i)_{i\in I}$$

είναι R-ισομορφισμός.

14. Έστωσαν M, N δύο R-πρότυπα. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$\eta : M \times N \to M \otimes_R N : (m, n) \mapsto m \otimes n$$

είναι R-αμφιπροσθετική.

15. Να δείξετε ότι αν D διαιρετή αβελιανή ομάδα και T αβελιανή ομάδα στρέψης τότε $D \otimes T \cong 0$.

16. Έστω R δακτύλιος, $f : M_R \to M'_R$ ομομορφισμός δεξιών R-προτύπων, $g : {}_RN \to {}_RN'$ ομομορφισμός αριστερών R-προτύπων. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$k : M \times N \to M' \otimes_R N' : (m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$$

είναι R-αμφιπροσθετική.

17. Θεωρούμε δύο δακτυλίους R και S, M ένα αριστερό R-πρότυπο και N ένα δεξί R-πρότυπο. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$\hom_S(M,N)\times R \to \hom_S(M,N) : (f : M \to N, r) \mapsto f \cdot r$$

όπου $(f\cdot r)(m) := f(rm)$ για κάθε $m \in M$, ορίζει R-δράση επί του $\hom_S(M,N)$.

18. Έστωσαν δύο δακτύλιοι R,S, L ένα δεξί R-πρότυπο και M ένα (R,S)-αμφιπρότυπο. Να δείξετε ότι η αβελιανή ομάδα $L\otimes_R M$ αποκτά τη δομή δεξιού S-προτύπου ως

$$(L\otimes M)\times S \to L\otimes M : (\ell\otimes m)\times s := \ell\otimes(m\times s).$$

19. Να αποδείξετε ότι στην κατηγορία **Set** των συνόλων, ένας μορφισμός είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν είναι 1-1.

20. Να αποδείξετε ότι στην κατηγορία **Set** των συνόλων, ένας μορφισμός είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν είναι επί.

21. Να δείξετε ότι υπάρχει συναρτητής $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ που στέλνει ένα σύνολο X στο δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}(X)$.

22. Αν A είναι ένα αριστερό R-πρότυπο, να δείξετε ότι υπάρχει συναρτητής

$$-\otimes_R A : \underbrace{\mathbf{Mod}_R}_{\text{δεξιά } R\text{-πρότυπα}} \to \mathbf{AbGrp}.$$

Επιπλέον, αν A είναι και δεξί S-πρότυπο τότε υπάρχει συναρτητής

$$-\otimes_R A : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_S.$$

23. Έστω κατηγορία $\mathscr{C}$ και βέλος $g : A' \to A$ μέσα στη $\mathscr{C}$. Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "\mathscr{C}(A,-)"] \arrow[r, bend right, "\mathscr{C}(A',-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

με συνιστώσες $\phi_B : \mathscr{C}(A,B) \to \mathscr{C}(A',B) : f \mapsto \phi(f) := f\circ g$ είναι φυσικός.

24. Να αποδείξετε ότι ο $D : \mathbf{Vect}_k^{op} \to \mathbf{Vect}_k$ που στέλνει ένα διανυσματικό χώρο V στον δυϊκό του $D(V) := V^* = \hom_k(V,k)$ και μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to W$ στην

$$f^* : W^* \to V^* : f^*(h) = h\circ f$$

είναι ανταλλοίωτος συναρτητής.

25. Έχει δεξια προσαρτημένο ο συναρτητής

$$\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}\times\mathbf{Set}$$

που ορίζεται ως $X \mapsto (X,X)$ στα αντικείμενα και $f \mapsto (f,f)$ στις συναρτήσεις;

26. (Προαιρετικά) Στο Λήμμα του Yoneda, πήραμε ισομορφισμούς

$$\vartheta_{c,F} : \mathbf{Nat}(\mathscr{C}(-,c),F) \xrightarrow{\cong} F$$

οι οποίοι είναι *φυσικοί στα c και F*. Να δείξετε τη φυσικότητα στο F, δηλαδή την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Nat}(\mathscr{C}(-,c),F) \arrow[r, "\vartheta_{c,F}"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & Fc \arrow[d, "\alpha_C"] \\
\mathbf{Nat}(\mathscr{C}(-,c),F') \arrow[r, "\vartheta_{c,F'}"] & F'c
\end{tikzcd}$$

για κάθε δύο συναρτητές F, F' και φυσικό μετασχηματισμό $\alpha : F \to F'$.

27. (Προαιρετικά) Να δείξετε ότι κάθε συναρτητής στέλνει ισομορφισμούς σε ισομορφισμούς. Δηλαδή, αν $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ κατηγορίες, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ συναρτητής και f ισομορφισμός αντικειμένων της $\mathscr{C}$ τότε ο Ff είναι ισομορφισμός στη $\mathscr{D}$.