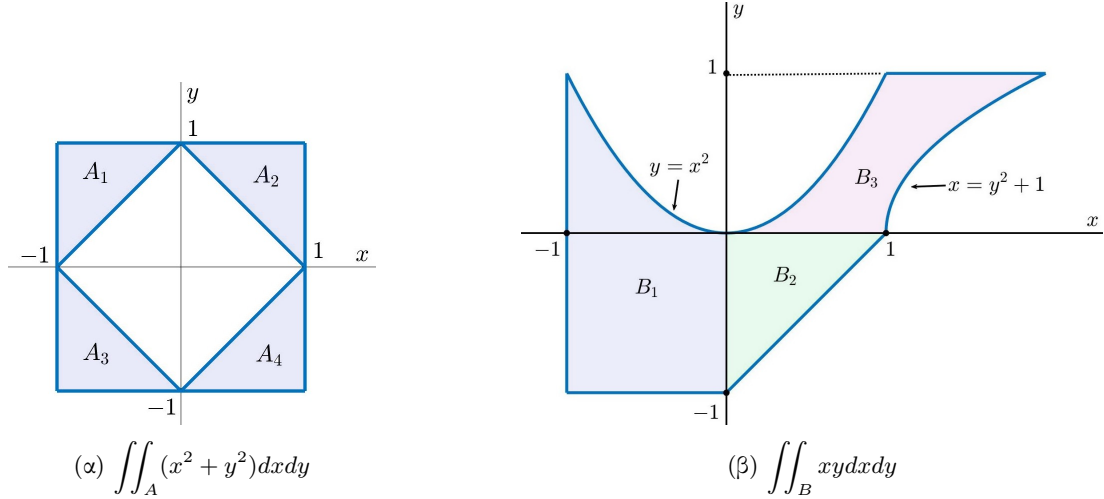


ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
 6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2024-25)

Άσκηση 1. Να γράψετε καθένα από τα χωρία που φαίνονται στις εικόνες σαν ένωση x -απλών και y -απλών χωρίων και να υπολογίσετε τα αντίστοιχα διπλά ολοκληρώματα.



Άσκηση 2 (μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος Schwarz για την ισότητα των μεικτών παραγώγων). Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό.

(α) Έστω $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε ορθογώνιο $R \subseteq U$ ισχύει ότι $\iint_R h(x, y) dx dy = 0$, αποδείξτε ότι $h \equiv 0$.

(β) Αν $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 -συνάρτηση (δηλαδή με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης), αποδείξτε ότι για κάθε ορθογώνιο $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq U$ ισχύει ότι

$$\iint_R f_{xy}(x, y) dx dy = \iint_R f_{yx}(x, y) dx dy = f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c).$$

(γ) Αποδείξτε το θεώρημα Schwarz: κάθε C^2 -πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών έχει ίσες μεικτές παραγώγους δεύτερης τάξης.

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D (x + y)^2 dx dy$, όπου D είναι το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $x + y = 2$, $x + y = 4$, $x^2 - y^2 = 4$ και $y = x$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} y \sin |x - y^2| dx dy.$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{(x+3y)^3}{(2x^2+2xy+13y^2)^{3/2}} dx dy$, όπου D το χωρίο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 2xy + 13y^2 \leq 1, 1 \leq 2x + 6y \leq 2\}.$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, όπου D είναι το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις καμπύλες

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad y = 0.$$

Άσκηση 7. Υπολογίστε το $\iint_A y dx dy$ όπου A το χωρίο που ορίζεται από τις

$$1 \leq x^2 + y^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x.$$

Άσκηση 8. Εφαρμόστε κατάλληλες αλλαγές συντεταγμένων προκειμένου να υπολογίσετε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα:

(α) $\iint_A \frac{1}{x^2 y^2} dx dy$, όπου A το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2, y = 2x^2, x = y^2, x = 3y^2$.

(β) $\iint_B x^2 y^2 dx dy$, όπου B το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2, y = 3x^2, xy = 2, xy = 6$.

(γ) $\iint_C (2x + y^2) dx dy$, όπου $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \leq 0, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$.

(δ) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, όπου D το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τις καμπύλες $xy = 2, xy = 4, x^2 - y^2 = 2$ και $x^2 - y^2 = 5$.

Άσκηση 9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, όπου D είναι το χωρίο του επιπέδου που περιορίζεται από τους κύκλους

$$\frac{x}{2} \leq x^2 + y^2 \leq x, \quad \frac{y}{2} \leq x^2 + y^2 \leq y.$$

Άσκηση 10. Υπολογίστε το $\iint_A y dx dy$ όπου A το χωρίο που ορίζεται από τις

$$b^2 \leq x^2 + y^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x$$

για $b \geq 0$.

Άσκηση 11. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{A'} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin \theta / r + 1/r^2}} dr d\theta$$

όπου $A' = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, r \cos \theta \leq 1, r \sin \theta \leq 1\}$.

Άσκηση 12. Να βρείτε το εμβαδόν της φραγμένης επίπεδης περιοχής D που ορίζεται από τις τέσσερις παραβολές $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 3y^2$.

Άσκηση 13. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, x \geq 0 \right\}$.

Άσκηση 14. Να βρεθεί ο όγκος V του στερεού K που φράσσεται από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$ και το επίπεδο $z = 0$.

Άσκηση 15. Να βρεθεί ο όγκος V του στερεού K που φράσσεται από κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και από πάνω από το κυκλικό παραβολοειδές $z = 1 - x^2 - y^2$.

Άσκηση 16. Μια λεπτή πλάκα έχει τη μορφή του μέρους ενός κυκλικού δακτυλίου με εξίσωση $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, και έχει πυκνότητα ανάλογη της απόστασης από το κέντρο. Να βρείτε το κέντρο μάζας της πλάκας.