

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές.

(α) Αν $ab > 0$ αποδείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

(β) Αν $ab < 0$ αποδείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Υπόδειξη: Επειδή $f_x(x, y) = 4ax^3$ και $f_y(x, y) = 4by^3$ έχουμε ότι $f_x(0, 0) = 0$ και $f_y(0, 0) = 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Επιπλέον $f_{xx}(x, y) = 12ax^2$, $f_{yy}(x, y) = 12by^2$ και $f_{xy}(x, y) = 0$. Οπότε, $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 0$ και άρα $\Delta(0, 0) = 0$. Συνεπώς, το κριτήριο δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να αποφανθεί. Εξετάζοντας όμως τον τύπο της f βλέπουμε τα εξής:

(α) Αν $a > 0$ και $b > 0$ τότε $f(x, y) = ax^4 + by^4 \geq 0 = f(0, 0)$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Αντίστοιχα αν $a < 0$ και $b < 0$ τότε $f(x, y) = ax^4 + by^4 \leq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα το $(0, 0)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου.

(β) Αν $a < 0$ και $b > 0$ τότε για όλα τα σημεία $(x, 0)$ στον x -άξονα έχουμε $f(x, 0) = ax^4 \leq 0$ ενώ για όλα τα σημεία $(0, y)$ στον y -άξονα $f(0, y) = by^4 \geq 0$. Άρα, στον x -άξονα το $(0, 0)$ είναι σημείο μεγίστου ενώ στον y -άξονα σημείο ελαχίστου. Άρα το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. Αντίστοιχα αν $a > 0$ και $b < 0$. $\square$

Άσκηση 2. Να μελετηθούν ως προς τα τοπικά ακρότατα οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x^4 - 4xy + 2y^2 - 10 \\g(x, y) &= x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \\h(x, y) &= x^4 + y^4 - (x - y)^4.\end{aligned}$$

Υπόδειξη: (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 4x^3 - 4y, f_y(x, y) = -4x + 4y, \\f_{xx}(x, y) &= 12x^2, f_{xy}(x, y) = -4, f_{yy}(x, y) = 4\end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2$. Επίσης,

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 48x^2 - 16 \quad (1)$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $y = x$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε

$$x^3 - x = 0 \iff x(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία είναι τα $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Από την (1) παίρνουμε $\Delta(0, 0) < 0$ και άρα το σημείο $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Επίσης, $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) > 0$ οπότε τα σημεία $(1, 1)$ και $(-1, -1)$ είναι τοπικά ελάχιστα.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}g_x(x, y) &= 4x^3 - 4(x - y) = 4x^3 - 4x + 4y \\g_y(x, y) &= 4y^3 + 4(x - y) = 4y^3 + 4x - 4y \\g_{xx}(x, y) &= 12x^2 - 4 \\g_{yy}(x, y) &= 12y^2 - 4 \\g_{xy}(x, y) &= g_{yx}(x, y) = 4\end{aligned}$$

και άρα $g \in C^2$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x - y) = 0. \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $x^3 = -y^3$, ή ισοδύναμα, $y = -x$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βλέπουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \iff x(x^2 - 2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$. Συνεπώς, τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Έχουμε

$$\Delta(x, y) = g_{xx}(x, y)g_{yy}(x, y) - (g_{xy}(x, y))^2 = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 16.$$

Βλέπουμε ότι $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για το αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως, παρατηρούμε ότι

- (1) $g(0, 0) = 0$,
- (2) για κάθε $0 < x \leq 1$ ισχύει ότι $g(x, 0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και
- (3) για κάθε $x = y \neq 0$ ισχύει ότι $g(x, y) = g(x, x) = 2x^4 > 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Για τα άλλα δύο σημεία διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $g_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = g_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$, οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η g έχει τοπικό ελάχιστο. Άρα, η g έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο τοπικά ελάχιστα.

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} h_x(x, y) &= 4x^3 - 4(x - y)^3, & h_y(x, y) &= 4y^3 + 4(x - y)^3, \\ h_{xx}(x, y) &= 12x^2 - 12(x - y)^2, & h_{yy}(x, y) &= 12y^2 - 12(x - y)^2 \end{aligned}$$

και

$$h_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 12(x - y)^2$$

Άρα $h \in C^2$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} h_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3 = 0 \\ h_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3 = 0 \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = x - y$, άρα $y = 0$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη, έχουμε $4x^3 = 0$, άρα $x = 0$. Οπότε, το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$. Έχουμε $h_{xx}(0, 0) = h_{yy}(0, 0) = h_{xy}(0, 0) = 0$ και άρα $\Delta(0, 0) = 0$. Συνεπώς, από το κριτήριο δεύτερης παραγώγου δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το $(0, 0)$ είναι ή δεν είναι τοπικό ακρότατο. Όμως, παρατηρούμε ότι

- (1) $h(0, 0) = 0$,
- (2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0, 0)$ ισχύει ότι $h(x, y) = h(x, x) = 2x^4 > 0$, και
- (3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0, 0)$ ισχύει ότι $h(x, y) = h(x, -x) = -14x^4 < 0$.

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της h είναι σαγματικό σημείο και η h δεν έχει τοπικά ακρότατα. $\square$

Άσκηση 3. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ πάνω στην έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 4$.

Υπόδειξη: Η συνθήκη γράφεται $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4 = 0$. Αφού $\nabla g(x, y) = (g_x(x, y), g_y(x, y)) = (2x, 4y) \neq (0, 0)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $g(x, y) = 0$, τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $g(x, y) = 0$ θα είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$8x = 2\lambda x \quad (2)$$

$$-2y = 4\lambda y \quad (3)$$

$$x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \quad (4)$$

Από την (2) έχουμε

$$8x = 2\lambda x \iff 2x(4 - \lambda) = 0 \iff x = 0 \text{ ή } \lambda = 4$$

και ομοίως από την (3)

$$-2y = 4\lambda y \iff 2y(1 + 2\lambda) = 0 \iff y = 0 \text{ ή } \lambda = -1/2. \quad (5)$$

(1) Έστω ότι $x = 0$. Τότε η (4) δίνει

$$2y^2 - 4 = 0 \iff y^2 = 2 \iff y = -\sqrt{2} \text{ ή } y = \sqrt{2}$$

οπότε τα σημεία $(0, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$ είναι λύσεις του συστήματος (για $\lambda = -1/2$).

(2) Έστω ότι $x \neq 0$. Τότε από την (2) έχουμε $\lambda = 4$, άρα η (3) δίνει $y = 0$. Αντικαθιστώντας στην (4) παίρνουμε

$$x^2 - 4 = 0 \iff x = -2 \text{ ή } x = 2$$

Συνεπώς και τα σημεία $(-2, 0)$, $(2, 0)$ είναι λύσεις του συστήματος (για $\lambda = 4$).

Οι παραπάνω λύσεις είναι όλες οι λύσεις αφού είτε $x = 0$ είτε $x \neq 0$. Άρα, τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ υπό την συνθήκη $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ είναι τα σημεία

$$(0, -\sqrt{2}), (0, \sqrt{2}), (-2, 0) \text{ και } (2, 0).$$

Έχουμε

$$f(0, -\sqrt{2}) = f(0, \sqrt{2}) = -2$$

και

$$f(-2, 0) = f(2, 0) = 16.$$

Δεδομένου ότι τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $g(x, y) = 0$ αποτελούν μια έλλειψη E του $\mathbb{R}^2$ δηλαδή ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ έχουμε ότι πάνω στην E η f θα παρουσιάζει ολικά ακρότατα. Επειδή όλα τα ολικά ακρότατα της f θα περιέχονται στα παραπάνω τέσσερα σημεία, βλέποντας τις τιμές της f σε αυτά τα σημεία καταλαβαίνουμε ότι

$$\min\{f(x, y) : g(x, y) = 0\} = -2 \text{ και } \max\{f(x, y) : g(x, y) = 0\} = 16$$

και άρα ότι η f πάνω στην έλλειψη παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στα σημεία $(0, -\sqrt{2})$ και $(0, \sqrt{2})$ και ολικό μέγιστο στα $(-2, 0)$ και $(2, 0)$. $\square$

Άσκηση 4. Να βρείτε το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που είναι πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$.

Υπόδειξη: Ψάχνουμε το σημείο (x_0, y_0, z_0) όπου η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο υπό την συνθήκη $g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$. Θα δώσουμε τρεις τρόπους εύρεσης αυτού του σημείου.

α' τρόπος (με πολλαπλασιαστές Lagrange): Έχουμε

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0) \quad (6)$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και άρα τα πιθανά τοπικά ακρότατα της $f(x, y, z)$ υπό την συνθήκη $g(x, y, z) = 0$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2y = 2z = \lambda \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Οπότε, $x = y = z = \lambda/2$ και αντικαθιστώντας στην $x + y + z = 3$ παίρνουμε $\lambda = 2$. Άρα, το μοναδικό πιθανό τοπικό ακρότατο της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 3$ είναι το σημείο $(1, 1, 1)$ και άρα αυτό είναι το ζητούμενο σημείο.

β' τρόπος (με επίλυση της συνθήκης ως προς μια μεταβλητή): Λύνοντας την εξίσωση $x + y + z = 3$ ως προς z έχουμε $z = 3 - x - y$ και αντικαθιστώντας στην f παίρνουμε την συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x, y, 3 - x - y) \\ &= x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 6y \end{aligned}$$

που ορίζεται σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της F λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y - 6 = 0 \\ 4y + 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η μοναδική λύση είναι το σημείο $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Έχουμε $F_{xx}(x, y) = F_{yy}(x, y) = 4$ και $F_{xy}(x, y) = 2$. Άρα $\Delta(1, 1) = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0$ και αφού $F_{xx}(1, 1) = 4 > 0$ το σημείο $(1, 1)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Άρα το $(x_0, y_0, 3 - x_0 - y_0) = (1, 1, 1)$ είναι το σημείο.

γ' τρόπος Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$x + y + z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{3}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} x + y + z &= x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = (x, y, z) \cdot (1, 1, 1) \leq \|(x, y, z)\| \cdot \|(1, 1, 1)\| \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Οπότε, για όλα τα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $x + y + z = 3$ έχουμε

$$3 \leq x^2 + y^2 + z^2 \implies f(1, 1, 1) \leq f(x, y, z).$$

Συνεπώς, το $(1, 1, 1)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπο τη συνθήκη $x + y + z = 3$. $\square$

Άσκηση 5. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

πάνω στο σύνολο

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1\}.$$

Υπόδειξη: Ισοδύναμα θα βρούμε πού μεγιστοποιείται η συνάρτηση

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

πάνω στο σύνολο

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι η h δεν μεγιστοποιείται στο εσωτερικό αυτού του συνόλου αφού το μοναδικό της κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0, 0)$ στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο. Άρα η h λαμβάνει μέγιστη τιμή στο σύνορο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1\}.$$

Για να προσδιορίσουμε αυτή τη μέγιστη τιμή θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Θέτουμε $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 1$ και γνωρίζουμε ότι τα πιθανά σημεία ακροτάτων θα ικανοποιούν το σύστημα

$$\nabla h(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \text{ και } g(x, y, z) = 0.$$

Συνεπώς, θα πρέπει να έχουμε

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(4x, 2y, 6z)$$

και άρα $\lambda \neq 0$ αφού διαφορετικά $(x, y, z) = (0, 0, 0) \notin S$. Με αυτό το δεδομένο βρίσκουμε ότι είτε $\lambda = 1/2$ και $(x, y, z) = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$, είτε $\lambda = 1$ και $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$ ή $\lambda = 1/3$ και $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$. Με σύγκριση βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή λαμβάνεται στα σημεία $(0, \pm 1, 0)$ και είναι 1. $\square$

Άσκηση 6. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της ποσότητας $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$, πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$.

Υπόδειξη: Η εύρεση της μέγιστης τιμής της ποσότητας $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται από την $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, είναι ισοδύναμο πρόβλημα με την εύρεση της μέγιστης τιμής της συνάρτησης $f(x, y, z) = xy + yz + 1$ πάνω στο ίδιο σύνολο. Για να την προσδιορίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Θέτουμε $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ και γνωρίζουμε ότι τα πιθανά σημεία ακροτάτων θα ικανοποιούν το σύστημα

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \text{ και } g(x, y, z) = 0.$$

Συνεπώς πρέπει

$$(y, x + z, y) = \lambda(2x, 2y, 2z).$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις.

- $\lambda = 0$. Τότε $y = 0$ και $x + z = 0$. Οπότε έχουμε δύο πιθανά σημεία τα $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ και $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
- $\lambda \neq 0$. Τότε $x \neq 0$ αφού διαφορετικά από την $y = 2\lambda x$ βλέπουμε ότι $y = 0$ και από την $y = 2\lambda z$ συμπεραίνουμε ότι $x = y = z = 0$, όμως το $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας. Εφόσον $x \neq 0$, από τις $y = 2\lambda x = 2\lambda z$ βλέπουμε ότι $x = z$ και $2\lambda y^2 = 2\lambda x(x + z)$, άρα

$$y^2 = x^2 + xz = 2x^2.$$

Αντικαθιστώντας στην $g(x, y, z) = 0$ βρίσκουμε ότι $x = \pm 1/2$ απ' όπου παίρνουμε άλλα τέσσερα σημεία, τα $(1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)$, $(-1/2, 1/\sqrt{2}, -1/2)$, $(1/2, -1/\sqrt{2}, 1/2)$ και $(-1/2, -1/\sqrt{2}, -1/2)$.

Με σύγκριση βρίσκουμε ότι η f λαμβάνει μέγιστη τιμή στα σημεία $(1/2, 1/\sqrt{2}, 1/2)$ και $(-1/2, -1/\sqrt{2}, -1/2)$ η οποία είναι ίση με $1 + \sqrt{2}$. $\square$

Άσκηση 7. Βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ στον κλειστό δίσκο $x^2 + y^2 \leq 4$. [Υπόδειξη: Θεωρήστε ξεχωριστά τα σημεία στο σύνορο και τα σημεία στο εσωτερικό του δίσκου. Τα τοπικά ακρότατα στο σύνορο μπορούν να υπολογιστούν με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange].

Υπόδειξη. Ξεκινάμε με την εύρεση των τοπικών ακροτάτων στο σύνορο χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange:

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 4y, \quad g_x(x, y) = 2x, \quad g_y(x, y) = 2y$$

όπου θέσαμε $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Έχουμε λοιπόν το σύστημα

$$f_x = \lambda g_x \Leftrightarrow 2x = \lambda 2x \Leftrightarrow 2(1 - \lambda)x = 0 \quad (7)$$

$$f_y = \lambda g_y \Leftrightarrow 4y = \lambda 2y \Leftrightarrow 2(2 - \lambda)y = 0 \quad (8)$$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad (9)$$

Από την (7) παίρνουμε $x = 0$ ή $\lambda = 1$. Αν $x = 0$ τότε η (9) δίνει $y = \pm 2$. Αν $\lambda = 1$ τότε η (8) δίνει $y = 0$ και η (9) $x = \pm 2$. Άρα τα πιθανά τοπικά ακρότατα του περιορισμού της f στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$ είναι τα σημεία

$$(0, 2), (0, -2), (2, 0), (-2, 0).$$

Τα κρίσιμα σημεία του περιορισμού της f στο εσωτερικό του δίσκου είναι οι λύσεις του συστήματος

$$f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (10)$$

$$f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad (11)$$

Συνεπώς το μοναδικό πιθανό τοπικό ακρότατο της f στο εσωτερικό του δίσκου είναι το $(0, 0)$. Επειδή

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 2) = f(0, -2) = 8, \quad f(2, 0) = f(-2, 0) = 4$$

έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $(0, 0)$ και ολικό μέγιστο στα σημεία $(0, 2)$ και $(0, -2)$. $\square$

Άσκηση 8. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^2 + \frac{2}{3}y^3$.

Υπόδειξη. Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 + 4xy$, $f_y(x, y) = 2x^2 + 2y + 2y^2$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 4x^3 + 4xy = 0 \\ 2x^2 + 2y + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} x^3 + xy = 0 \\ x^2 + y + y^2 = 0 \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $x(x^2 + y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $y = -x^2$. Αν $x = 0$ τότε από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1 + y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή -1 , οπότε παίρνουμε τα σημεία $(0, 0)$ και $(0, -1)$. Αντίστοιχα, αν $y = -x^2$ τότε η δεύτερη εξίσωση δίνει $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ και τότε $0 = -x^2 \Rightarrow x = 0$, οπότε έχουμε πάλι το σημείο $(0, 0)$. Άρα η f έχει δύο κρίσιμα σημεία, το $(0, -1)$ και το $(0, 0)$.

Προχωράμε στην εύρεση των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης. Έχουμε

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y, \quad f_{yy}(x, y) = 2 + 4y, \quad f_{xy}(x, y) = 4x$$

και συνεπώς

$$\Delta(x, y) = (12x^2 + 4y)(2 + 4y) - 16x^2.$$

Για το σημείο $(0, -1)$ έχουμε $\Delta(0, -1) = (-4)(2 - 4) = 8 > 0$ και $f_{xx}(0, -1) = -4 < 0$, άρα το $(0, -1)$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Για το σημείο $(0, 0)$ έχουμε $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα το κριτήριο δεύτερης παραγώγου δεν αποφαίνεται. Παρατηρούμε όμως ότι

$$f(x, y) = (x^4 + 2x^2y + y^2) + \frac{2}{3}y^3 = (x^2 + y)^2 + \frac{2}{3}y^3$$

Άρα στον x -άξονα,

$$f(x, 0) = x^4 \geq 0$$

ενώ στην παραβολή $y = -x^2$,

$$f(x, -x^2) = -\frac{2}{3}x^6 \leq 0$$

Επειδή $f(0, 0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι πάνω στον x -άξονα το $(0, 0)$ είναι σημείο ελαχίστου για την f ενώ πάνω στην παραβολή $y = x^2/2$ είναι σημείο μεγίστου. Συνεπώς το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f . Άρα η f έχει ένα μοναδικό τοπικό ακρότατο, το $(0, -1)$, το οποίο είναι τοπικό μέγιστο. $\square$

Άσκηση 9. Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas μιας εταιρείας δίνεται από την

$$q = f(x, y) = Cx^a y^b,$$

όπου q είναι ο αριθμός μονάδων προϊόντος, x ο αριθμός των μονάδων κεφαλαίου και y ο αριθμός των μονάδων εργασίας. Οι σταθερές $C > 0$ και $0 < a, b < 1$ είναι γνωστές.

Έστω ότι το κόστος της εταιρείας ανά μονάδα κεφαλαίου είναι $r > 0$ (euro) και το κόστος ανά μονάδα εργασίας είναι $s > 0$ (euro). Να δείξετε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης παραγωγής είναι

$$C \left(\frac{t}{a+b} \right)^{a+b} \left(\frac{a}{r} \right)^a \left(\frac{b}{s} \right)^b,$$

για κόστος παραγωγής t .

Υπόδειξη: Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την f υπό τον περιορισμό $g(x, y) = t$ για $x, y \geq 0$. Έχουμε $f(x, y) \geq 0$ και $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ οπότε το 0 είναι ελάχιστο της f . Η g είναι η συνάρτηση κόστους, η οποία θα ισούται με το κόστος της κάθε μονάδας κεφαλαίου επί τον αριθμό των μονάδων της συν το κόστος κάθε μονάδας εργασίας επί τον αριθμό των μονάδων της δηλαδή $g(x, y) = rx + sy$. Έστω

$$A = [0, \infty)^2, \quad S = \{(x, y) \in A : g(x, y) = t\}.$$

Η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο S , άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Αφού οι $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι C^2 , για $x, y > 0$ έχουμε $\nabla g(x, y) = (r, s) \neq (0, 0)$ άρα με βάση τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = t. \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$\begin{cases} Cax^{a-1}y^b = \lambda r & \xrightarrow{\lambda \neq 0} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \frac{r}{s} \\ Cbx^ay^{b-1} = \lambda s \end{cases}$$

Από την $rx + sy = t$ έχουμε

$$x = \frac{t}{r} \frac{a}{a+b}, \quad y = \frac{t}{s} \frac{a}{a+b}.$$

Το μοναδικό σημείο που βρήκαμε θα είναι σημείο μεγίστου, επομένως αντικαθιστώντας στην f έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Άσκηση 10. Να δείξετε ότι η επιφάνεια $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ μπορεί να αναπαρασταθεί, με μοναδικό τρόπο, από το γράφημα μίας διαφορίσιμης συνάρτησης $z = g(x, y)$ γύρω από το σημείο $(1, 0, -1)$. Στη συνέχεια να βρείτε τις μερικές παραγώγους της g στο σημείο $(1, 0)$.

Υπόδειξη: Θέτουμε

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

και παρατηρούμε ότι

$$f_z(1, 0, -1) = 3 \neq 0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $z = g(x, y)$ τέτοια ώστε

$$f(x, y, g(x, y)) = 0$$

για κάθε (x, y) σε κατάλληλη περιοχή του σημείου $(1, 0)$. Άρα η επιφάνεια $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ είναι το γράφημα της g γύρω από το σημείο $(1, 0, -1)$.

Σύμφωνα και πάλι με το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης έχουμε ότι

$$f_x + f_z g_x = 0 \quad \text{και} \quad f_y + f_z g_y = 0.$$

Επομένως,

$$g_x(1, 0) = 1 = g_y(1, 0).$$

□

Άσκηση 11. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x^3 z^2 - z^3 y x = 0$$

μπορεί να επιλυθεί, με μοναδικό τρόπο ως προς z , σε μία περιοχή του σημείου $(1, 1, 1)$ αλλά όχι σε περιοχή του σημείου $(0, 0, 0)$. Στη συνέχεια υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $z_x(1, 1)$ και $z_y(1, 1)$.

Υπόδειξη: Θέτουμε

$$f(x, y, z) = x^3 z^2 - z^3 y x$$

και έχουμε ότι

$$f_z(1, 1, 1) = -1 \neq 0$$

Επομένως η εξίσωση

$$x^3 z^2 - z^3 y x = 0$$

μπορεί να επιλυθεί, με μοναδικό τρόπο ως προς z , σε μια περιοχή του σημείου $(1, 1, 1)$.

Από την άλλη πλευρά έχουμε ότι

$$f_z(0, 0, 0) = 0$$

και άρα δεν ικανοποιείται η υπόθεση του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης. Επιπλέον βλέπουμε ότι η εξίσωση μας για $x = 0$ ικανοποιείται για κάθε z και συνεπώς δεν μπορεί να λυθεί με μοναδικό τρόπο σε καμμία περιοχή του σημείου $(0, 0, 0)$.

Τέλος, όπως και στην προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε ότι

$$z_x(1, 1) = 2 \quad \text{και} \quad z_y(1, 1) = -1.$$

□

Άσκηση 12. Αν η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ διαθέτει συνεχείς παραγώγους 1ης τάξης με $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) \neq 0$, δείξτε ότι υπάρχει μια μοναδική συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g(0) = 0$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(g(y) + y, g^2(y)) = 0$, για y κοντά στο μηδέν και βρείτε την τιμή $g'(0)$.

Υπόδειξη: Θέτουμε

$$F(x, y) = f(x + y, x^2)$$

και έχουμε ότι η F είναι C^1 με $F(0, 0) = f(0, 0) = 0$. Επιπλέον $F_x = f_x + 2xf_y$ και συνεπώς

$$F_x(0, 0) = f_x(0, 0) \neq 0.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης έχουμε ότι υπάρχει C^1 συνάρτηση $x = g(y)$ σε μια περιοχή του 0 τέτοια ώστε $g(0) = 0$ και $F(g(y), y) = 0$, για y κοντά στο μηδέν. Αυτό όμως συνεπάγεται το ζητούμενο, δηλαδή ότι $f(g(y) + y, g^2(y)) = 0$, για y κοντά στο μηδέν. Επιπλέον,

$$g'(0) = -\frac{F_y(0, 0)}{F_x(0, 0)} = -\frac{f_x(0, 0)}{f_x(0, 0)} = -1.$$

□

Άσκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2x + e^z + z$.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει C^2 συνάρτηση $z = f(x, y)$, ορισμένη σε ανοικτή περιοχή A του $(-1, 0)$, τέτοια ώστε $F(x, y, f(x, y)) = 0$ και $f(-1, 0) = 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $(-1, 0)$.

(γ) Να βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(-1, 0)$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{f(x, y)}{(x+1)^2 + y^2}$.

Υπόδειξη. (α) Η F είναι C^2 ως άθροισμα C^2 συναρτήσεων. Οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της F είναι οι εξής:

$$F_x = 2x + 2, \quad F_y = 2y, \quad F_z = e^z + 1$$

Επειδή $F_z(-1, 0, 0) = 2 \neq 0$ από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει μοναδική $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ όπου A ανοικτή περιοχή του $(-1, 0)$ με $f \in C^2(A)$ και τέτοια ώστε $f(-1, 0) = 0$ και $F(x, y, f(x, y)) = 0$ για κάθε $(x, y) \in A$.

Μπορούμε να δώσουμε και κάποιες σχέσεις για τις μερικές παραγώγους της $z = f(x, y)$. Από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης έχουμε ότι

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_{z=f(x,y)} = -\frac{2x+2}{e^z+1} \Big|_{z=f(x,y)}$$

και

$$f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \Big|_{z=f(x,y)} = -\frac{2y}{e^z+1} \Big|_{z=f(x,y)}$$

Παραγωγίζοντας ακόμη μια φορά ως προς x και y έχουμε ότι οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι δίνονται από τους τύπους:

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{2(e^z+1) - (2x+2)e^z z_x}{(e^z+1)^2} \Big|_{z=f(x,y)},$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{2(e^z+1) - (2y)e^z z_y}{(e^z+1)^2} \Big|_{z=f(x,y)}$$

και

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -\frac{-(2x+2)e^z z_y}{(e^z+1)^2} \Big|_{z=f(x,y)}$$

όπου $z_x = f_x(x, y)$ και $z_y = f_y(x, y)$.

(β) Ειδικότερα στο σημείο $(x, y) = (-1, 0)$ (επειδή $z = f(-1, 0) = 0$) ύστερα από πράξεις παίρνουμε τις τιμές $f_x(-1, 0) = f_y(-1, 0) = 0$, $f_{xx}(-1, 0) = f_{yy}(-1, 0) = -1$ και $f_{xy}(-1, 0) = 0$. Άρα, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $(-1, 0)$.

(β) Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{(x+1)^2 + y^2} = 0.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{f(x, y) - \frac{1}{2}(-(x+1)^2 - y^2)}{(x+1)^2 + y^2} = 0 &\implies \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \left(\frac{f(x, y)}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{1}{2} \right) = 0 \\ &\implies \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{f(x, y)}{(x+1)^2 + y^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 14. Αποδείξτε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z = f(x, y)$, ορισμένη σε μια ανοικτή περιοχή A του $(1, 1)$ τέτοια ώστε $f(1, 1) = 1$ και

$$x^{f(x,y)} + [f(x,y)]^y + y^x = 3, \quad (x, y) \in A.$$

Υπολογίστε τα μοναδιαία διανύσματα (u_1, u_2) για τα οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος f_u μηδενίζεται.

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x, y, z) = x^z + z^y + y^x - 3 = 0$. Παρατηρούμε ότι $F(1, 1, 1) = 0$ και ότι η F είναι $C^\infty((0, \infty)^3)$. Γράφουμε

$$F(x, y, z) = e^{z \ln x} + e^{y \ln z} + e^{x \ln y} - 3,$$

οπότε

$$F_z(x, y, z) = \ln x e^{z \ln x} + \frac{y}{z} e^{y \ln z}, \quad F_x(x, y, z) = \frac{z}{x} e^{z \ln x} + \ln y e^{x \ln y}, \quad F_y(x, y, z) = \ln z e^{y \ln z} + \frac{x}{y} e^{x \ln y}.$$

Αφού $F_z(1, 1, 1) = 1 \neq 0$, από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι υπάρχει C^∞ -συνάρτηση $z = f(x, y)$ ορισμένη σε μια ανοικτή περιοχή A του $(1, 1)$ ώστε να ισχύει

$$x^{f(x,y)} + [f(x,y)]^y + y^x = 3, \quad \text{για κάθε } (x, y) \in A$$

με $f(1, 1) = 1$ και

$$f_x(1, 1) = -\frac{F_x(1, 1, 1)}{F_z(1, 1, 1)} = -1, \quad f_y(1, 1) = -\frac{F_y(1, 1, 1)}{F_z(1, 1, 1)} = -1.$$

Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $f_{\vec{u}}(1, 1) = 0$. Τότε,

$$f_{\vec{u}}(1, 1) = \langle \nabla f(1, 1), \vec{u} \rangle = 0 \iff (-1, -1) \cdot (u_1, u_2) = 0 \iff u_1 = -u_2.$$

Αφού το $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο, έχουμε ότι

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1 \text{ και } u_1 = -u_2 \implies u_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } u_2 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα τα διανύσματα αυτά είναι τα $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. □

Άσκηση 15. Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα με κέντρο το 0, με $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε

$$e^{xf(x)} - \cos(x^2 f(x)) + x - f(x) = 0$$

για κάθε $x \in I$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y) = e^{xy} - \cos(x^2 y) + x - y$. Έχουμε

$$F_x(x, y) = ye^{xy} + 2xy \sin(x^2 y) + 1$$

$$F_y(x, y) = xe^{xy} + x^2 \sin(x^2 y) - 1$$

και άρα η F είναι C^1 συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι $F(0, 0) = 0$ και $F_y(0, 0) = -1 \neq 0$. Άρα από το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει ανοικτό διάστημα $I = (-\delta, \delta)$ με κέντρο το 0 και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $F(x, f(x)) = 0 \iff e^{xf(x)} - \cos(x^2 f(x)) + x - f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Επιπλέον,

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

για κάθε $x \in I$. Ειδικότερα, για $x = 0$ παίρνουμε $f'(0) = -\frac{F_x(0, 0)}{F_y(0, 0)} = -\frac{1}{-1} = 1$. □