

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
(Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών - Διανυσματική Ανάλυση)
5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (2024-25)

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές.

(α) Αν $ab > 0$ αποδείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f .

(β) Αν $ab < 0$ αποδείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f .

Άσκηση 2. Να μελετηθούν ως προς τα τοπικά ακρότατα οι συναρτήσεις

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$$

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

$$h(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^4.$$

Άσκηση 3. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ πάνω στην έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 4$.

Άσκηση 4. Να βρείτε το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που είναι πλησιέστερο στο $(0, 0, 0)$.

Άσκηση 5. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

πάνω στο σύνολο

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1\}.$$

Άσκηση 6. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της ποσότητας $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$, πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 7. Βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ στον κλειστό δίσκο $x^2 + y^2 \leq 4$.
[Υπόδειξη: Θεωρήστε ξεχωριστά τα σημεία στο σύνορο και τα σημεία στο εσωτερικό του δίσκου. Τα τοπικά ακρότατα στο σύνορο μπορούν να υπολογιστούν με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange].

Άσκηση 8. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^2 + \frac{2}{3}y^3$.

Άσκηση 9. Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas μιας εταιρείας δίνεται από την

$$q = f(x, y) = Cx^a y^b,$$

όπου q είναι ο αριθμός μονάδων προϊόντος, x ο αριθμός των μονάδων κεφαλαίου και y ο αριθμός των μονάδων εργασίας. Οι σταθερές $C > 0$ και $0 < a, b < 1$ είναι γνωστές.

Έστω ότι το κόστος της εταιρείας ανά μονάδα κεφαλαίου είναι $r > 0$ (euro) και το κόστος ανά μονάδα εργασίας είναι $s > 0$ (euro). Να δείξετε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης παραγωγής είναι

$$C \left(\frac{t}{a+b} \right)^{a+b} \left(\frac{a}{r} \right)^a \left(\frac{b}{s} \right)^b,$$

για κόστος παραγωγής t .

Άσκηση 10. Να δείξετε ότι η επιφάνεια $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ μπορεί να αναπαρασταθεί, με μοναδικό τρόπο, από το γράφημα μίας διαφορίσιμης συνάρτησης $z = g(x, y)$ γύρω από το σημείο $(1, 0, -1)$. Στη συνέχεια να βρείτε τις μερικές παραγώγους της g στο σημείο $(1, 0)$.

Άσκηση 11. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x^3 z^2 - z^3 y x = 0$$

μπορεί να επιλυθεί, με μοναδικό τρόπο ως προς z , σε μία περιοχή του σημείου $(1, 1, 1)$ αλλά όχι σε περιοχή του σημείου $(0, 0, 0)$. Στη συνέχεια υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $z_x(1, 1)$ και $z_y(1, 1)$.

Άσκηση 12. Αν η $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ διαθέτει συνεχείς παραγώγους 1ης τάξης με $f(0, 0) = 0$, $f_x(0, 0) \neq 0$, δείξτε ότι υπάρχει μια μοναδική συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g(0) = 0$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(g(y) + y, g^2(y)) = 0$, για y κοντά στο μηδέν και βρείτε την τιμή $g'(0)$.

Άσκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2x + e^z + z$.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει C^2 συνάρτηση $z = f(x, y)$, ορισμένη σε ανοικτή περιοχή A του $(-1, 0)$, τέτοια ώστε $F(x, y, f(x, y)) = 0$ και $f(-1, 0) = 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $(-1, 0)$.

(γ) Να βρείτε το πολώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(-1, 0)$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{f(x,y)}{(x+1)^2 + y^2}$.

Άσκηση 14. Αποδείξτε ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z = f(x, y)$, ορισμένη σε μια ανοικτή περιοχή A του $(1, 1)$ τέτοια ώστε $f(1, 1) = 1$ και

$$x^{f(x,y)} + [f(x,y)]^y + y^x = 3, \quad (x \in A).$$

Υπολογίστε τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u}$ για τα οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\mathbf{u}}$ μηδενίζεται.

Άσκηση 15. Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα με κέντρο το 0, με $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε

$$e^{xf(x)} - \cos(x^2 f(x)) + x - f(x) = 0$$

για κάθε $x \in I$.